

On désigne par F un K -espace vectoriel normé de dimension finie et X une partie quelconque de E .

I) Suites de fonctions

1) Modes de convergences

On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans F .
C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n une fonction de X dans F .

a) Convergence simple

Définition 1 (Convergence simple).

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : X \rightarrow F$ sur X si $\forall x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Dans ce cas f s'appelle la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 1.

Pour étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X , on fixe x dans X et on détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Exemples

Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X dans les cas suivants.

① $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X = [0, 1], f_n(x) = x^n$.

Soit $x \in X$, si $x = 1$, on a $f_n(1) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et si $x \in [0, 1[$, on a $f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On conclut que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers f où $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en 1, mais f n'est pas continue en 1, d'où

La convergence simple n'est pas suffisante pour garder la continuité de la limite simple.

② $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X = [0, +\infty[, f_n(x) = \frac{x}{x+n}$.

Soit $x \in X$, on a $f_n(x) = \frac{x}{x+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On conclut que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Remarquons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$, d'où

La convergence simple n'est pas suffisante pour faire l'intervention des limites.

③ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X = \mathbb{R}, f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Soit $x \in X$, on a $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$.

On conclut que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f où $f(x) = e^x$ □

b) Convergence uniforme

Définition 2 (Convergence uniforme).

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : X \rightarrow F$ sur X si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\|_F = 0$$

Dans ce cas f s'appelle la limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Proposition 1.

Si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : X \rightarrow F$ sur X , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur X

Remarque 2.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : X \rightarrow F$ sur X , et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $g : X \rightarrow F$, alors $f = g$.

On a deux techniques pour étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X :

Technique 1.

Pour étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X .

① On détermine f la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X .

② S'il existe $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite ne dépend pas de x et $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \rightarrow 0$,

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur X .

Technique 2.

Pour étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X vers f .

On étudie les variations de la fonction $x \mapsto \|f_n(x) - f(x)\|_F$ sur X , pour déterminer $a_n := \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\|_F$, puis on étudie $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

On a la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X vers f , si et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Exemples

Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X dans les cas suivants.

① $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X = [0, +\infty[, f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

• Il est clair que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur X vers f la fonction nulle sur X .

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X = [0, +\infty[, |f_n(x) - f(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{1}{n} = \alpha_n$.

Comme (α_n) ne dépend pas de x et tend vers 0, alors d'après la technique 1, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur X vers f qui est la fonction nulle sur X .

② $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X = [0, +\infty[, f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$.

• Il est clair que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur X vers f la fonction nulle sur X .

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X = [0, +\infty[, \varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^\alpha x e^{-nx}$.

On a φ_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in X = [0, +\infty[, \varphi'_n(x) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx)$.

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$\varphi'_n(x)$		+	-
$\varphi_n(x)$	0	$\varphi_n\left(\frac{1}{n}\right)$	0

D'après le tableau de variations, on déduit que : $\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\|_F = \sup_{x \in X} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{en^{1-\alpha}}$.

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur X , si et seulement si, $\left(\frac{1}{en^{1-\alpha}}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0, si et seulement si, $1 - \alpha > 0$, si et seulement si, $\alpha < 1$ ☐

On une technique pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément :

Technique 3.

S'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne converge pas vers 0, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f .

Exemples

① $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X =]0, +\infty[, f_n(x) = e^{-\sqrt{n}x}$.

• Il est clair que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers f la fonction nulle sur X .

• On a $\forall n \geq 1, f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0$, d'après la technique 3, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.

• $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X = \mathbb{R}, f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

• Il est clair que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers f où $f(x) = e^x$.

• On a $\forall n \geq 0, f_n(n) - f(n) = 2^n - e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'après la technique 3, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ ☒

2) Stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite

X désigne ici une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E .

a) Théorème d'interversion des limites

Théorème 1 (Théorème de double limites).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans F et $a \in \overline{X}$.

On suppose que

$(H_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n \in F$.

$(H_2) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur un voisinage de a dans X .

Alors $\begin{cases} \text{la suite } (l_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ f \text{ admet une limite finie en } a \end{cases}$ et on a l'interversion des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

Remarque 3.

Ce théorème reste valable si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) dans le cas où X un intervalle de $\mathbb{R}$ n'est pas majoré (resp. n'est pas minoré)

Dans la pratique, on considère un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) de la forme $[\alpha, +\infty[$ ou $]\alpha, +\infty[$ (resp. $]-\infty, \alpha]$ ou $]-\infty, \alpha[$) avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple Pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, alors la convergence n'est pas uniforme sur tout voisinage de $+\infty$ ☒

b) Continuités

Théorème 2 (Théorème de continuité en un point a).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans F et $a \in X$.

On suppose que

$(H_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a .

$(H_2) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur un voisinage de a dans X .

Alors f est continue en a .

Théorème 3 (Théorème de continuité globale).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans F et $a \in X$.

On suppose que

$(H_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur X .

$(H_2) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur tout compact de X (ou bien sur X).

Alors f est continue sur X .

Technique 4.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans F et $a \in X$.

On suppose que

$(H_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur X .

$(H_2) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur X et f n'est pas continue sur X .

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur X

Exemple (Oral, CCP)

On pose $f_n(t) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nt^2} \cos(\sqrt{nt})$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? ☒

Solution

On a $f_n(0) = \frac{n+2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\forall t > 0, f_n(t) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nt^2} \cos(\sqrt{n}t) \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-nt^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0; +\infty[$ avec $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Comme f n'est pas continue sur $[0, +\infty[$, alors la convergence n'est pas uniforme sur $[0; +\infty[$ $\square$

c) Intégration sur un segment

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On se propose de donner les conditions suffisantes pour que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$.

Si, $I = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, on applique le théorème suivant :

Théorème 4 (d'intégration sur un segment).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en $[a, b]$.

(H₂) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : [a, b] \rightarrow F$ sur $[a, b]$.

Alors f est continue en $[a, b]$ et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

Remarque 4.

Ce théorème tombe en défaut sur un intervalle quelconque, comme le montre l'exercice 6 (TD sur les suites de fonctions)

Exercice 1

On pose $f_n(t) = (t^2 + 1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t}$.

① Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

② Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 2e - 3$.

Solution

① Pour tout $t \in [0, 1], f_n(t) = (t^2 + 1) \left(\frac{n}{n+t} e^t + \frac{t}{n+t} e^{-t} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (t^2 + 1)e^t = f(t)$, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers f .

Pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \geq 1, f_n(t) - f(t) = (t^2 + 1) \frac{-te^t + te^{-t}}{n+t} = -t(t^2 + 1) \frac{e^t - e^{-t}}{n+t}$, donc

$$|f_n(t) - f(t)| = t(t^2 + 1) \frac{e^t - e^{-t}}{n+t} \leq \frac{2(e - \frac{1}{e})}{n} = \alpha_n$$

Comme $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ ne dépend pas de t et converge vers 0, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

② Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le segment $[0, 1]$, d'après le théorème d'intégration sur un segment, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt$$

Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt &= \int_0^1 (t^2 + 1) (e^t)' dt = [(t^2 + 1)e^t]_0^1 - 2 \int_0^1 te^t dt \\ &= 2e - 1 - 2 \int_0^1 t(e^t)' dt = 2e - 1 - 2 \left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) \\ &= 2e - 1 - 2 \left([te^t]_0^1 - [e^t]_0^1 \right) = 2e - 1 - 2(e - (e - 1)) = 2e - 3 \quad \square \end{aligned}$$

d) Dérivation

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ et $f(x) = \sqrt{x}$.

Remarquons que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$ car :

$$\forall x \in [0, +\infty[, |f_n(x) - f(x)| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{n}$$

Alors que la limite uniforme f n'est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ (f n'est pas dérivable en 0).

D'où la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas suffisante pour garder le caractère de classe C^1 .

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 5 (Caractère de classe C^1).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^1 sur I .

(H₂) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I .

(H₃) $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction g sur tout segment de I (ou bien sur I).

Alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$, et on a

$$\forall x \in I, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

De plus $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Théorème 6 (Caractère de classe C^k).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^k sur I .

(H₂) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I .

(H₃) $\forall j \in [1, k-1], (f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I .

(H₄) $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I (ou bien sur I).

Alors la limite simple f de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de classe C^k sur I et on a

$$\forall j \in [0, k], \forall x \in I, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)^{(j)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)}(x)$$

De plus $\forall j \in [0, k], (f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f^{(j)}$ sur tout segment de I .

Corollaire 1 (Caractère de classe C^k).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^k sur I .

(H₂) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I .

(H₃) $\forall j \in [1, k], (f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I (ou bien sur I).

Alors la limite simple f de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de classe C^k sur I et on a

$$\forall j \in [0, k], \forall x \in I, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)^{(j)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Théorème 7 (Caractère de classe C^∞).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans F .

On suppose que

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^∞ sur I .

(H2) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I .

(H3) $\forall j \in \mathbb{N}^*, (f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I (ou bien sur I).

Alors la limite simple f de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de classe C^∞ sur I et on a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)^{(j)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)}(x)$$

3) Intégration sur un intervalle réel (voir page 23)

II) Séries de fonctions

1) Modes de convergences

On désigne par $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de X dans F .

C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ une fonction de X dans F .

Pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$: la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.

Notons que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de X dans F .

a) Convergence simple

Définition 3 (Convergence simple).

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur X si $\forall x \in X$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Autrement dit : la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X .

Dans ce cas, on définit :

- La fonction somme f sur X par $\forall x \in X, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
- La fonction reste R_n d'ordre n sur X par $\forall x \in X, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Remarque 5.

Pour étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur X , on fixe x dans X et on détermine la nature de la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.

Exemples

Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

① $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}, 0 \leq |f_n(x)| \leq |x| \cdot \frac{1}{n^2}$, comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 1} |x| \cdot \frac{1}{n^2}$ converge, par le critère de

comparaison pour les séries positives, on a $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge, ainsi la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge absolument, par suite la série

$\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge. On conclut alors que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

② $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x \leq 0$, on a $e^{-x\sqrt{n}} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$, donc la série $\sum_{n \geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0$, d'après le critère de Riemann (Critère de n^α), la série $\sum_{n \geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ converge.

On conclut alors que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

$$\textcircled{3} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Si $x > 0$, la suite $(\frac{1}{n^x})_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge.

Si $x \leq 0$, on a $\left| \frac{(-1)^n}{n^x} \right| = \frac{1}{n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$, d'où $(\frac{(-1)^n}{n^x})_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0.

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ diverge grossièrement.

On conclut alors que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ ☐

b) Convergence uniforme

Définition 4 (Convergence uniforme).

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X .

Proposition 2.

Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X , alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur X .

Voici une technique pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur X .

Technique 5.

Si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur X ,
Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur X .

Exemple Étudier la convergence uniforme sur $] -1, 1[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x^n$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n$, on a $\sup_{x \in] -1, 1[} |f_n(x)| = \sup_{x \in] -1, 1[} |x|^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $] -1, 1[$, par suite la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$ ☐

Proposition 3.

Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X , alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur X .

Proposition 4.

On suppose que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur X , alors

$$\sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } X \iff \text{la suite des restes } (R_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } X \text{ vers } 0$$

On a alors une technique pour montrer la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur X :

Technique 6.

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur X et il existe $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite ne dépend pas de x et

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\|_F \leq \alpha_n \text{ et } \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X .

Exemple Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la suite $(\frac{1}{n^x})_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge et on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x} \right| = \frac{1}{(n+1)^x}$$

Convergence uniforme sur $[a, +\infty[$

Pour tout $x \geq a$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^a} \leq \frac{1}{(n+1)^a} = \alpha_n$.

Comme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépend pas de x et converge vers 0, d'après la technique 6, on a la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ sur $[a, +\infty[$.

Convergence uniforme sur $]0, +\infty[$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$, on a $\sup_{x > 0} |f_n(x)| = \sup_{x > 0} \frac{1}{n^x} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $]0, +\infty[$, d'après la technique 5, la série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$ $\square$

c) Convergence normale**Définition 5 (Convergence normale).**

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X si la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x)\|_F$$

On a deux techniques pour montrer la convergence normale d'une série de fonctions.

Technique 7.

S'il existe $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite ne dépend pas de x et $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n(x)\|_F \leq \beta_n$ et $\sum_{n \geq 0} \beta_n$ converge,

Alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X .

Technique 8.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie la fonction $x \mapsto \varphi_n(x) := \|f_n(x)\|_F$, pour déterminer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x)\|_F$, puis on utilise la définition d'une série normalement convergente sur X .

Exemple Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} n^\alpha x e^{-nx}$ sur $X = [0, +\infty[$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X = [0, +\infty[, f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$.

On a $\varphi_n(x) = |f_n(x)| = n^\alpha x e^{-nx}$, φ_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in X = [0, +\infty[, \varphi'_n(x) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx)$.

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$\varphi'_n(x)$		+	0
$\varphi_n(x)$	0	$\varphi_n\left(\frac{1}{n}\right)$	0

D'après le tableau de variations, on déduit que $\sup_{x \in X} \|f_n(x)\|_F = \sup_{x \in X} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{en^{1-\alpha}}$.

Alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur X si et seulement si, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{en^{1-\alpha}}$ converge (série de Riemann), si et seulement si, $1 - \alpha > 1$, si et seulement si, $\alpha < 0$ ☒

Proposition 5.

Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X , alors elle converge uniformément sur X .

Exemples

① Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + e^{nx}}$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 1, n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{nx}}$.

- Convergence normale sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

$\forall x \geq a, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + e^{na}} = \beta_n$.

Comme β_n ne dépend pas de x et $\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-na} = (e^{-a})^n$, puisque $|e^{-a}| = e^{-a} < 1$, alors la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (e^{-a})^n$

converge, comme $\beta_n \geq 0$, par le critère d'équivalence, on déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \beta_n$ converge, d'après la technique 7, on

conclut que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + e^{nx}}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, par suite elle converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

- Convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

On a $\sup_{x > 0} |f_n(x)| = \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, d'après la technique 5, on conclut que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + e^{nx}}$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$, par suite ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

② Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.

Pour tout $x \geq a, n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, on a $\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = \sup_{x \geq a} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a}$.

Comme $a > 1$, alors la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, +\infty[$ ☒

d) Convergence absolue

Définition 6 (Convergence absolue).

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur X si la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|_F$ converge pour tout $x \in X$.

Proposition 6.

Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X , alors elle converge absolument sur X .

Résumons les quatre modes de convergences pour une série de fonctions dans le schéma suivant :

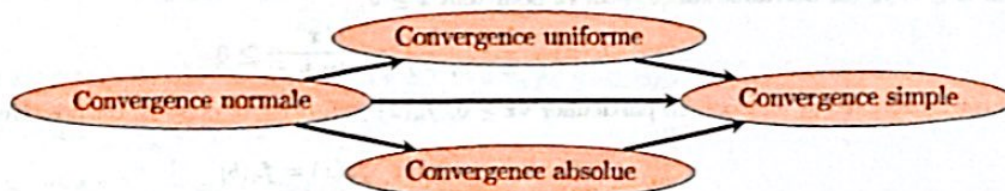


FIGURE 1 - Modes de convergence d'une série de fonctions

Aucune des réciproques n'est vraie et de plus : la convergence absolue (resp. uniforme) n'implique pas la convergence uniforme (resp. absolue), comme le montrent les exemples ci-dessous :

Exemples

① La série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge absolument sur $] -1, 1[$ mais ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$,

$$\text{car } \sup_{x \in]-1, 1[} |x^n| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

② On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n^2}$.

Pour x fixé dans $[0, 1]$, on pose $a_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$.

• Convergence simple :

La suite $(a_n(x))_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées, on a la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n(x)$.

On conclut alors que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

• Convergence uniforme :

D'après le critère spécial des séries alternées,

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} = \alpha_n$$

Comme $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ ne dépend pas de x et converge vers 0, alors la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, ce qui prouve la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[0, 1]$.

• Convergence absolue :

Pour $x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann)

et donc la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ diverge, d'où la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge absolument en aucune valeur de $[0, 1]$ ☹

Exercice 2

Étudier la convergence simple puis uniforme sur tout segment de $[0, +\infty[$ de la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)$$

Solution

Pour tout $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$.

• Convergence simple sur $[0, +\infty[$

Soit $x \geq 0$ fixé.

Au voisinage de 0, $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$, comme $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $f_n(x) = \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ainsi $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$.

Puisque la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors par le critère d'équivalence, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

- **Convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de $[0, +\infty[$**
Pour tout $n \geq 1$, f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \geq 0$$

Donc f_n est croissante sur $[0, +\infty[$, en particulier $\forall x \geq 0$, $f_n(x) \geq f_n(0) = 0$, donc f_n est positive.
Alors

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [a, b]} f_n(x) = f_n(b)$$

Comme $\sum_{n \geq 1} f_n(b)$ converge, alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, b]$.

- **Convergence uniforme sur $[0, +\infty[$**

Pour tout $n \geq 1$, $|f_n(n)| = 1 - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'après la technique 3, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[a, b]$.

D'après la technique 5, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$ ☒

2) Propriétés de la somme

Ici X désigne une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E et $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonction de X dans un espace vectoriel normé de dimension finie F .

a) Intersion d'une limite et d'une somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n et f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

À l'aide d'encadrement par des intégrales, montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{\pi}{2}$.

On en déduit alors que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$$

Pour permuter la limite et la somme, on applique le théorème de double limite :

Théorème 8 (Théorème de double limites).

Soit $\sum f_n$ une série de fonction de X dans F et $a \in \bar{X}$.

On suppose que

$$(H_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n \in F.$$

$$(H_2) \quad \sum f_n \text{ converge uniformément sur un voisinage de } a \text{ dans } X.$$

Alors la série $\sum l_n$ converge et on a l'intersion de la limite et la somme : $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

Remarque 6.

Ce théorème reste valable si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) dans le cas où X un intervalle de $\mathbb{R}$ n'est pas majoré (resp. n'est pas minoré)

Dans la pratique, on considère un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) de la forme $[\alpha, +\infty[$ ou $]\alpha, +\infty[$ (resp. $]-\infty, \alpha]$ ou $]-\infty, \alpha[$) avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Technique 9.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n \in F. \\ \sum_{n \geq 0} l_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur tout voisinage de a dans X ,

Par conséquent la convergence n'est pas uniforme sur X .

Exercice 3 (La fonction zêta de Riemann)

- ① (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$.

On pose alors $\forall x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (La fonction zêta de Riemann)

- (b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$

- ② La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

- ③ (a) Montrer par définition que ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$, (donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$ existe).

- (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Solution

Pour tout $x \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

- ① (a) Pour tout $x \geq 2$, on a $\sup_{x \geq 2} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 2} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^2}$.

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[2, +\infty[$

- (b) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$

(H₁) On a $\forall n \geq 1$, $f_n(x) = n^{-x} = e^{-x \ln(n)}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = l_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

(H₂) D'après la question précédente, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$ et $[2, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
D'après le théorème de double limites, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} l_n = 1$$

- ② Pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l_n = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, d'après la technique 9, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

- ③ (a) Pour tout $n \geq 1$, f_n est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x > 1$, $f'_n(x) = \frac{-\ln(n)}{n^x} \leq 0$, donc f_n est décroissante sur $]1, +\infty[$.
Soit $x, y \in]1, +\infty[$

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies \forall n \geq 1, f_n(y) \leq f_n(x) \\ &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \\ &\implies \zeta(y) \leq \zeta(x) \end{aligned}$$

Donc ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$, (donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$ existe).

- (b) Montrons que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) \in [0, +\infty]$.

Pour tout $x > 1$ et $n \geq 1$, $\frac{1}{n^x} \geq 0$, alors

$$\forall N \geq 1, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$$

En passant à limite quand x tend vers 1, on en déduit que

$$\forall N \geq 1, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq \ell$$

En passant à limite quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq \ell$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et à termes positifs, alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, donc $\ell = +\infty$ $\square$

b) Continuité de la somme d'une série de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n et f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

À l'aide d'encadrement par des intégrales, montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{\pi}{2}$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = f(0)$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en 0, mais f n'est pas continue en 0.

Pour établir la continuité de la somme "infinie", on applique les théorèmes suivants :

Théorème 9 (Théorème de continuité en un point a).

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonction de X dans F et $a \in X$.

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a .

(H₂) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur un voisinage de a dans X .

Alors $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie au voisinage de a et continue en a .

Théorème 10 (Théorème de continuité globale).

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonction de X dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X .

(H₂) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout compact de X (ou bien sur X).

Alors $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur X .

Exercice 4 (La fonction zêta de Riemann alternée)

① (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

On pose alors $\forall x > 0$, $\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ (La fonction zêta de Riemann alternée).

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x) = 1$.

(c) Déterminer le signe μ .

② Montrer que μ est continue sur $]0, +\infty[$.

Solution

① (a) Montrons que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Pour tout $x > 0$, la suite $(\frac{1}{n^x})_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge et on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \right| = \frac{1}{(n+1)^x}$$

Pour tout $x \geq a$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$.

Comme la majoration ne dépend pas de x et converge vers 0, alors la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.
 (b) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x) = 1$.

• Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$.

• D'après la question précédente la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ (c'est un voisinage de $+\infty$)

D'après le théorème de double limites, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$$

(c) Soit $x > 0$, puisque $\mu(x)$ est la somme d'une série alternée, alors le signe de $\mu(x)$ est celui de son premier terme $\frac{(-1)^0}{1^x} = 1$, donc $\mu(x) \geq 0$.

② Montrons que μ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $n \geq 1$, $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• D'après la question ① (a), la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

D'après le théorème de continuité, μ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Par suite elle est continue sur $]0, +\infty[$ ☐

Application 1.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie et B sa boule unité alors

• $x \mapsto (1_{\mathcal{A}} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est continue sur B .

• $x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathcal{A}$.

c) Intégration terme à terme sur un segment

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On se propose de donner les conditions suffisantes pour que $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) dt \right)$

Si, $I = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, on applique le théorème suivant :

Théorème 11 (Intégration terme à terme sur un segment).

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonction de $[a, b]$ dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.

(H₂) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[a, b]$ et on a l'interversion des signes $\int$ et $\sum$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$$

Exercice 5

Sachant que $\forall \omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| < 1$, $\frac{1}{1-\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n$. Calculer pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}$

Solution

On a

$$\frac{1}{z - e^{it}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{z}} \quad \text{car } \left| \frac{e^{it}}{z} \right| = \frac{1}{|z|} < 1$$

$$\frac{1}{z - e^{it}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{it}}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{z^{n+1}}$$

On pose $f_n(t) = \frac{e^{int}}{z^{n+1}}$ $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 2\pi]$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[0, 2\pi]$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f_n(t)| = \left(\frac{1}{|z|} \right)^{n+1}$, donc la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{|z|} \right)^{n+1}$ converge, car $\frac{1}{|z|} < 1$, par

suite la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0, 2\pi]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}} = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{z^{n+1}} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{z^{n+1}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{int} dt \right)$$

Puisque $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$, alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{int} dt \right) = \frac{2\pi}{z} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{int} dt \right)}_{=0} = \frac{2\pi}{z} \quad \square$$

d) Dérivation terme à terme

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 12 (Caractère de classe C^1).

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série de fonction de I dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I .

(H₂) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur I de somme f .

(H₃) $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I (ou bien sur I).

Alors $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

Exercice 6

On considère la série de fonctions de terme général f_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$

① Démontrer que f est dérivable sur $[0, 1]$.

② Calculer $f'(1)$.

Solution

① Nous allons démontrer que f est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

(H₁) Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], f'_n(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$$

(H₂) Soit $x \in [0, 1]$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et donc $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, alors $|f_n(x)|_{+\infty} \frac{x^2}{2n^2}$, or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge absolument, donc converge.

On en déduit que la série des fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$, la fonction f est donc définie sur $[0, 1]$.

(H₃) On a $\|f'_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$. On peut alors affirmer que la fonction f est de classe C^1 , elle est donc dérivable sur $[0, 1]$ et on a

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\textcircled{2} \text{ On a } f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+N} - 1 \right) = -1 \quad \square$$

Théorème 13 (Caractère de classe C^k).

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonction de I dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I .

(H₂) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I de somme f .

(H₃) $\forall j \in [1, k-1]$, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I .

(H₄) $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I (ou bien sur I).

Alors $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^k sur I et $\forall j \in [0, k]$, $\forall x \in I$, $f^{(j)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

De plus $\forall j \in [0, k]$, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Corollaire 2 (Caractère de classe C^k).

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonction de I dans F .

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I .

(H₂) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I de somme f .

(H₃) $\forall j \in [1, k]$, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I (ou bien sur I).

Alors $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^k sur I et $\forall j \in [0, k]$, $\forall x \in I$, $f^{(j)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Théorème 14 (Caractère de classe C^∞).

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonction de I dans F et $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que

(H₁) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^∞ sur I .

(H₂) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I de somme f .

(H₃) $\forall j \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \geq 0} f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I (ou bien sur I).

Alors $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^∞ sur I et $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(j)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Exercice 7 (Fonction zêta de Riemann)

On pose $\forall x > 1, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- ① Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
- ② En déduire que ζ est strictement décroissante et convexe sur $]1, +\infty[$.
- ③ Donner la courbe représentative de ζ sur $]1, +\infty[$.

Solution

Pour tout $x > 1$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

- ① Montrons que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
 - Pour tout $n \geq 1, f_n$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, f_n^{(j)}(x) = \frac{(-\ln(n))^j}{n^x}$$

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.
- Soit $[a, b]$ un segment de $]1, +\infty[$, alors

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], |f_n^{(j)}(x)| = \left| \frac{(-\ln(n))^j}{n^x} \right| = \frac{(\ln(n))^j}{n^x} \leq \frac{(\ln(n))^j}{n^a} = \beta_n$$

Puisque $(\beta_n)_{n \geq 1}$ ne dépend pas de x et $\sum_{n \geq 1} \beta_n$ converge, car $\beta_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$, alors $\sum_{n \geq 1} f_n^{(j)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, b]$.

On en déduit alors que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et on a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x > 1, \zeta^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^j}{n^x}$$

- ② • On a $\forall x > 1, \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x} \leq 0$, donc ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

- On a $\forall x > 1, \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^x} \geq 0$, donc ζ est convexe sur $]1, +\infty[$.

- ③ On a vu que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$ et $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.
D'où la courbe représentative de ζ sur $]1, +\infty[$:

Application 2.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie et $a \in \mathcal{A}$ alors

- $e_a : t \mapsto e_a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a^n$ définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^∞ et $\forall k \in \mathbb{N}, e_a^{(k)}(t) = a^k \exp(ta) = \exp(ta) a^k$.
- $\forall t, s \in \mathbb{R}, e_a(t+s) = e_a(t) e_a(s) = e_a(s) e_a(t)$.

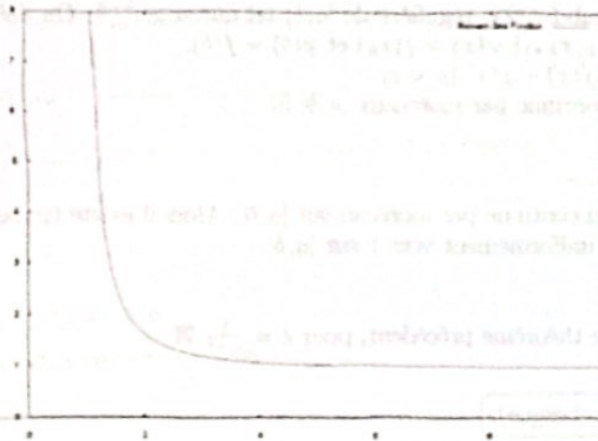


FIGURE 2 - La courbe représentative de $f(x) = \frac{1}{x}$

3) Intégration terme à terme sur un intervalle q.c.g (voir page 27)

III) Approximation uniforme

1) Rappels

Définition 7 (Subdivision).

- On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ finie strictement croissante telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.
- On appelle pas de la subdivision σ , le réel positif $\delta(\sigma) = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$

Exemple (Subdivision régulière) Une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est dite régulière si $\forall k \in [0, n-1]$, $x_{k+1} - x_k$ est constante. Dans ce cas, on a $\forall k \in [0, n]$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$. $\square$

Définition 8 (Fonction en escalier).

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow F$ est dite en escalier s'il existe $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in [0, n-1]$, f est constante sur l'intervalle ouvert $]x_k - x_{k+1}[$

Exemple La fonction partie entière est en escalier sur tout segment de $\mathbb{R}$ $\square$

Définition 9 (Fonction continue par morceaux).

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow F$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ telle que

- $\forall k \in [0, n-1]$, f est continue sur l'intervalle ouvert $]x_k - x_{k+1}[$.
- $\forall k \in [0, n-1]$, f admet une limite finie à droite de x_k .
- $\forall k \in [1, n]$, f admet une limite finie à gauche de x_k .

Exemple Toute fonction continue sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ $\square$

2) Approximation uniforme par des fonctions en escaliers

Théorème 15.

Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ une fonction continue par morceau sur $[a, b]$. Alors

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ une fonction en escalier telle que $\forall x \in [a, b]$, $\|f(x) - \varphi(x)\|_F < \varepsilon$.

Preuve : (Étapes de la démonstration)

1. On suppose que f est continue $[a, b]$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$, vérifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \alpha \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$.

(b) Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision régulière de $[a, b]$ tel que $n > \frac{b-a}{\varepsilon}$. On définit la fonction en escalier $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall k \in [0, n-1], \forall x \in [x_k, x_{k+1}], \varphi(x) = f(x_k)$ et $\varphi(b) = f(b)$.

Montrer que $\forall x \in [a, b], \|f(x) - \varphi(x)\|_F < \varepsilon$.

2. Prouver le théorème, si f est continue par morceaux $[a, b]$ $\square$

Corollaire 3.

Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ une fonction continue par morceau sur $[a, b]$. Alors il existe $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ dans F qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème précédent, pour $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ $\square$

Application 3 (Lemme de Lebesgue).

Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ continue par morceaux, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

"Classique, vous devez savoir le démontrer"

Preuve : (Étapes de la démonstration)

1. Montrer le lemme de Lebesgue si f est en escalier sur $[a, b]$.

2. En utilisant le théorème 8, montrer le lemme de Lebesgue si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ $\square$

Exercice 8 (C'est classique, vous devez savoir le démontrer)

Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ de classe C^1 , à l'aide d'une intégration par parties, démontrer le lemme de Lebesgue $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$ $\square$

Solution

Pour tout $\lambda > 0$, $t \mapsto e^{i\lambda t}$ et f sont de classe C^1 sur $[a, b]$, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt &= \int_a^b \left(\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right)' f(t) dt \\ &= \left[\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} f(t) \right]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt \\ &= \frac{e^{i\lambda b} f(b) - e^{i\lambda a} f(a)}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt \end{aligned}$$

Alors

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t)| dt = \frac{M}{\lambda}$$

où $M = |f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt$ est une constante indépendante de λ , on en déduit alors que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$ $\square$

3) Approximation uniforme par des fonctions polynomiales

Théorème 16 (de Stone-Weierstrass).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue $[a, b]$. Alors

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale telle que $\forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Preuve : Voir CNC 2016 $\square$

Corollaire 4.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors il existe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème précédent, pour $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ ☐

Application 4.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b x^n f(x) dx = 0$, alors f est nulle.

Preuve :

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_a^b P(x)f(x)dx = 0$.

2. En utilisant le corollaire précédent, montrer que f est nulle ☐

Donc la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$.

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 0, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = f(t) = 0.$$

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \text{ on pose } I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Par une intégration par parties

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} (e^{-t})' dt = - \left(\underbrace{\left[\frac{t^n e^{-t}}{n!} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt = I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante, par suite } \forall n \in \mathbb{N}, I_n = I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

$\textcircled{3}$ On a $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [0, +\infty[\\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0, +\infty[\\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt \end{cases}$, on en déduit alors que le théorème d'intégration n'est pas valable sur un intervalle quelconque.

b) Intégration sur un intervalle quelconque (Théorème de convergence dominée)

Théorème 2 (de convergence dominée).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$.

On suppose que

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue par morceaux sur I .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et f est continue par morceaux sur I .
- Hypothèse de domination : $\exists g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I , telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq g(t)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ et f sont intégrables sur I et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

Exercice 2 (Intégrale de Wallis)

On appelle intégrale de Wallis l'intégrale suivante : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ① Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
- ② Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$.

Solution

$$\textcircled{1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, W_n - W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^n(t)(1 - \sin(t))}_{\geq 0} dt \geq 0, \text{ et } W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \geq 0, \text{ donc } (W_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroissante}$$

et minorée par 0, par suite elle est convergente.

$$\textcircled{2} \quad \text{On pose } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], f_n(t) = \sin^n(t).$$

$$\text{► } \forall n \in \mathbb{N} f_n \text{ est continue sur } [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\text{► } f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ et } f \text{ est continue par morceaux.}$$

► $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], |f_n(t)| = |\sin^n(t)| \leq 1 = g(t)$, et g est continue, positive et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 0 \quad \square$$

Exercice 3 (Intégrale de Gauss)

L'intégrale de Gauss est définie par $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

① Montrer que l'intégrale de Gauss est convergente, on admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

② Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution

① $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (donc le problème se pose en $+\infty$), comme $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, alors f est intégrable sur $[0, +\infty[$, en particulier $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

② On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, +\infty[$ $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases}$.

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$ f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

► Soit $t \in [0, +\infty[$ fixé, comme $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sqrt{n} > t$.

Par suite $\forall n \geq n_0, f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{-t^2 \frac{\ln(1 - \frac{t^2}{n})}{-\frac{t^2}{n}}}$ si $t \neq 0$, donc $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t) = e^{-t^2}$.

D'où (f_n) converge simplement vers f sur $[0, +\infty[$ et f est continue sur $[0, +\infty[$.

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, +\infty[$.

Si $t \in [0, \sqrt{n}]$, on sait que $\forall u \in \mathbb{R}, 1 + u \leq e^u$, donc $0 \leq 1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$, d'où $f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$.

Si $t > \sqrt{n}$, $f_n(t) = 0 \leq e^{-t^2}$, ainsi $\forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| = f_n(t) \leq g(t) = e^{-t^2}$ et g est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \square$$

Exercice 4 (La fonction Gamma)

On définit la fonction gamma par : $\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

① Montrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

② Montrer que pour tout $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \Gamma(x)$.

Solution

① Soit $x > 0$, $f : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ (donc le problème se pose en 0 et $+\infty$).

► Au voisinage de 0 :

$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, puisque l'intégrale de Riemann, $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge (car $1 - x < 1$), par le critère d'équivalence, l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

► Au voisinage de $+\infty$:

comme $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, alors $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge, par suite $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$ f_n est continue sur $]0, +\infty[$.

► Soit $t \in [0, +\infty[$ fixé, comme $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n > t$.

Par suite $\forall n \geq n_0, f_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1} e^{-t \frac{\ln(1 - \frac{t}{n})}{-\frac{t}{n}}}$.

Donc $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t) = t^{x-1} e^{-t}$, d'où (f_n) converge simplement vers f sur $]0, +\infty[$ et f est continue sur $]0, +\infty[$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, +\infty[$.
 Si $t \in]0, n]$, on sait que $\forall u \in \mathbb{R}, 1 + u \leq e^u$, donc $0 \leq 1 - \frac{t}{n} \leq e^{-\frac{t}{n}}$, d'où $f_n(t) = t^{n-1} (1 - \frac{t}{n})^n \leq t^{n-1} e^{-t}$.
 Si $t > n$, $f_n(t) = 0 \leq t^{n-1} e^{-t}$, ainsi $\forall t \in]0, +\infty[, |f_n(t)| = f_n(t) \leq g(t) = t^{n-1} e^{-t}$ et g est continue, positive et intégrable (d'après la question précédente) sur $]0, +\infty[$.
 D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \quad \square$$

2) Généralisation du théorème de convergence dominée

Soit $f : \begin{cases} A \times I \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$

Pour $x \in A$, on pose (lorsqu'il existe), $F(x) = \int_I f(x, t) dt$

Théorème 3 (de convergence dominée généralisé).

Soit $a \in \bar{A}$. On suppose que

- $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- $\forall t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = \ell(t)$ où ℓ est continue par morceaux sur I .
- $\exists g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable telle que $\forall (x, t) \in V(a) \times I, |f(x, t)| \leq g(t)$ avec $V(a)$ un voisinage de a dans A .

Alors $t \mapsto \ell(t)$ et $t \mapsto f(x, t)$ sont intégrables sur I et $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) dt$

Exemple Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xe^{it}} dt = 0$. $\square$

Solution

On pose $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}], f(x, t) = e^{-xe^{it}}$.

Remarquons tout d'abord, $f(x, \frac{\pi}{2}) = e^{-ix}$ n'admet pas de limite en $+\infty$, pour cela, nous allons appliquer le théorème sur l'intervalle d'intégration $[0, \frac{\pi}{2}[$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
- On a $|f(x, t)| = |e^{-x \cos(t)} e^{i(-x \sin(t))}| = e^{-x \cos(t)}$, donc $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell(t) = 0$ et ℓ est continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
- $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, \frac{\pi}{2}[, |f(x, t)| = e^{-x \cos(t)} \leq 1 = g(t)$ et g est continue, positive et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

D'après le théorème de convergence dominée généralisé, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xe^{it}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xe^{it}} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell(t) dt = 0 \quad \square$$

Exercice 5 (Transformation de Laplace)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[0, +\infty[$ telle que pour tout $x > 0, t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

F est appelée la transformée de Laplace de f

- ① Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- ② On suppose que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{C}$, montrer que si $\ell \neq 0$, alors $F(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ell}{x}$.

Solution

① Pour tout $t \geq 0$ et $x > 0$, on pose $f(x, t) = f(t)e^{-xt}$.

► On a $\forall x > 0, t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

► $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell(t) = \begin{cases} f(0) & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$ et ℓ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

► $\forall x \geq 1, \forall t \geq 0, |f(x, t)| \leq |f(t)|e^{-t} = g(t)$ et g est continue, positive sur $]0, +\infty[$, comme tout $x > 1$ $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, pour $x = 1$, on déduit que g est intégrable sur $[0, +\infty[$.
D'après le théorème de convergence dominée généralisée, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t)e^{-xt} \right) dt = \int_0^{+\infty} \ell(t) dt = 0$$

② Montrons que $F(x) \sim \frac{\ell}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$

On a $x F(x) = x \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt \stackrel{u=xt}{=} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} dt$ Pour tout $x > 0$ et $t \geq 0$, on pose $f(x, t) = f\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t}$.

► On a $\forall x > 0, t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

► $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell(t) = \begin{cases} f(0) & \text{si } t = 0 \\ \ell e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$ et ℓ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

► $\forall x \geq 1, \forall t \geq 0$, comme f est continue sur $[0, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, alors f est bornée sur $[0, +\infty[$ alors $|f(x, t)| \leq |f(t)|e^{-t} \leq M e^{-t} = g(t)$ (où $M = \sup_{t \geq 0} |f(t)| < +\infty$) et g est continue, positive sur $[0, +\infty[$.

comme tout $\lambda = -1 < 0$, alors g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée généralisée, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right) dt = \int_0^{+\infty} \ell(t) dt = f(0) \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = f(0)$$

Comme $\ell \neq 0$, alors $x F(x) \sim f(0)$, soit $F(x) \sim \frac{\ell}{x}$ □

3) Intégration terme à terme d'une série de fonctions

On se propose de donner les conditions suffisantes pour que $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) dt \right)$

a) Intégration sur un segment (Rappel)

On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F .

Théorème 4 (Intégration terme à terme sur un segment).

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$ dans F .

On suppose que

► $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a, b]$.

► $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[a, b]$ et on a $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$

Remarque 2.

Ce théorème tombe en défaut sur un intervalle quelconque.

Exercice 6

Sachant que $\forall \omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| < 1, \frac{1}{1-\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n$, Calculer pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}$

Solution

On a $\frac{1}{z - e^{it}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{it}}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{z^{n+1}}$

On pose $f_n(t) = \frac{e^{int}}{z^{n+1}}, n \in \mathbb{N}, t \in [0, 2\pi]$.

► $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$.

► $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 2\pi], |f_n(t)| = \left(\frac{1}{|z|}\right)^{n+1} = \beta_n$, or β_n ne dépend pas de t et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \beta_n$ converge,

car $\frac{1}{|z|} < 1$, donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0, 2\pi]$.

e^{-t} ,
sitive

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}} = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{z^{n+1}} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{z^{n+1}} dt$$

Puisque $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$, alors $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}} = \frac{2\pi}{z} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{z^{n+1}} dt}_{=0} = \frac{2\pi}{z} \quad \square$

b) Intégration sur un intervalle quelconque

On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur l'intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 5 (Intégration terme à terme).

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I .
- $\sum f_n$ converge simplement sur I de somme f continue par morceaux sur I .
- La série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge.

Alors f est intégrable sur I et $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$

Exercice 7 On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Sachant que $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

① Montrer que $f : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

② Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution

① On a $f : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ (donc le problème se pose au voisinage de 0 et $+\infty$).

► Au voisinage de 0 :

on a $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0, par suite f est intégrable sur $]0, 1]$.

► Au voisinage de $+\infty$:

on a $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On conclut alors que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

② On a pour tout $t > 0$ $\frac{t}{e^t - 1} = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}$ car $|e^{-t}| < 1$ $\sum_{n=0}^{+\infty} te^{-t}(e^{-t})^n$ Pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = te^{-(n+1)t}$.

► Soit $n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

► Soit $t > 0$, fixé, d'après ce qui précède, la série $\sum_{n \geq 0} te^{-(n+1)t}$ converge et sa somme $f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$, ainsi $\sum_{n \geq 0} f_n$

converge et sa somme f continue sur $]0, +\infty[$.

► Soit $n \in \mathbb{N}$, par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt &= \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt = \int_0^{+\infty} t \left(-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1} \right)' dt \\ &= \underbrace{\left[-t \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{n+1} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt}_{=\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt < \infty$$

$$\text{Alors } \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

27