

Méthode et symboles : Séries de fonctions

Déf : La suite de fonctions

$$S_n \subset U \supset S_{n+1} \subset U$$

$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, S_n - S_{n+1}$ est bornée et $\sup_{x \in A} \|S_n(x) - S_{n+1}(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.S. sur A. et la suite $R_n \xrightarrow{C.U.} 0$ sur A

$$\sup_{x \in A} \|R_n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Th de continuité

Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A. et $\sum_{n \geq 0} f_n \subset U$ sur A ou A est compact C.A.

Alors $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur A.

Th de continuité : f_n est continue sur $[a, b]$

$$\sum_{n \geq 0} f_n \subset U \text{ sur } [a, b]$$

$$\text{Alors } \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$$

$\sum_{n \geq 0} f_n \subset U$ sur A $\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, f_n$ est bornée et $\sup_{x \in A} \|f_n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\sum_{n \geq 0} f_n \subset U \text{ sur } A$$

Th de dérivabilité

Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in C^1$ sur A et $\sum_{n \geq 0} f_n' \subset U$ sur A

$$\sum_{n \geq 0} f_n' \subset U \text{ sur } A \text{ ou } A \text{ est compact C.A.}$$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \subset U$ sur A et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x))'$

Si S est C sur A. $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$

$\exists (f_n)$ universelle (ne dépend pas de x) et $\sum_{n \geq 0} f_n \subset U$

La suite de fonctions $f_n \xrightarrow{C.U.} 0$ sur A

Th pour la limite et $\sum$

Si $f_n \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = l_n$ et $\sum_{n \geq 0} f_n \subset U$ sur A ou A est bornée et C.A.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_k(x)$$

Th : $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*$

Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est C sur A. et $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)} \subset U$ sur A

$$\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)} \subset U \text{ sur } A \text{ ou } A \text{ est compact C.A.}$$

Alors $\forall 0 \leq k \leq p-1, \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)} \subset U$ sur A

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$$

