

Méthodes et symboles: suites de fonctions

Def: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$
 $\|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon, \forall x \in A$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, f_n - f$ est bornée
 et $\sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle (ne dépend pas de x)
 $\forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq a_n, \forall x \in A$
 et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$V(x_n) \subset A, \|f_n(x_n) - f(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

f_n bornée sur A à valeurs dans E
 $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur A
 alors $g \cdot f_n \xrightarrow{CU} g \cdot f$

Th de Continuité
 si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n$ est continue sur A .
 $(f_n) \xrightarrow{CU} f$ sur A ou bien
 alors f continue sur A .

Th
 si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n$ continue sur $[a, b]$
 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

$f_n \xrightarrow{CU} f$ sur A

$f_n \xrightarrow{CU} f$ sur A
 $A \subset B \subset C$

Th de double limite
 $a \in \mathbb{R}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = L_n \exists$ dans
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = a$
 si $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur A ou
 $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $B(a)$

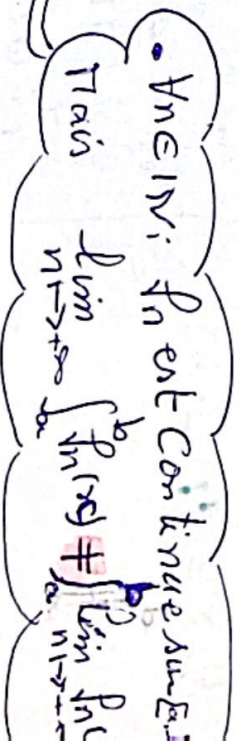
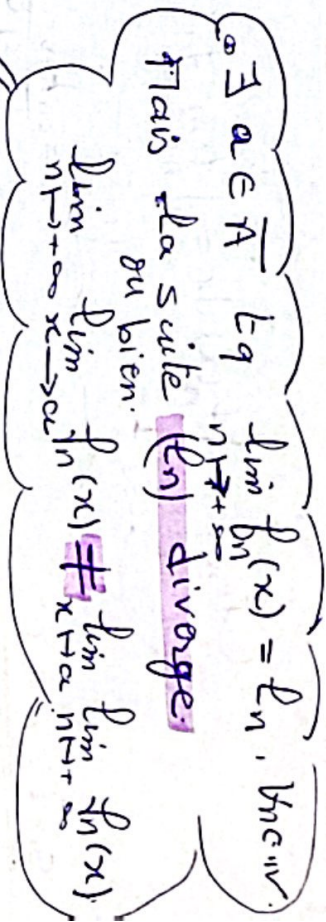
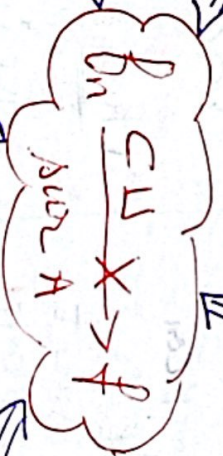
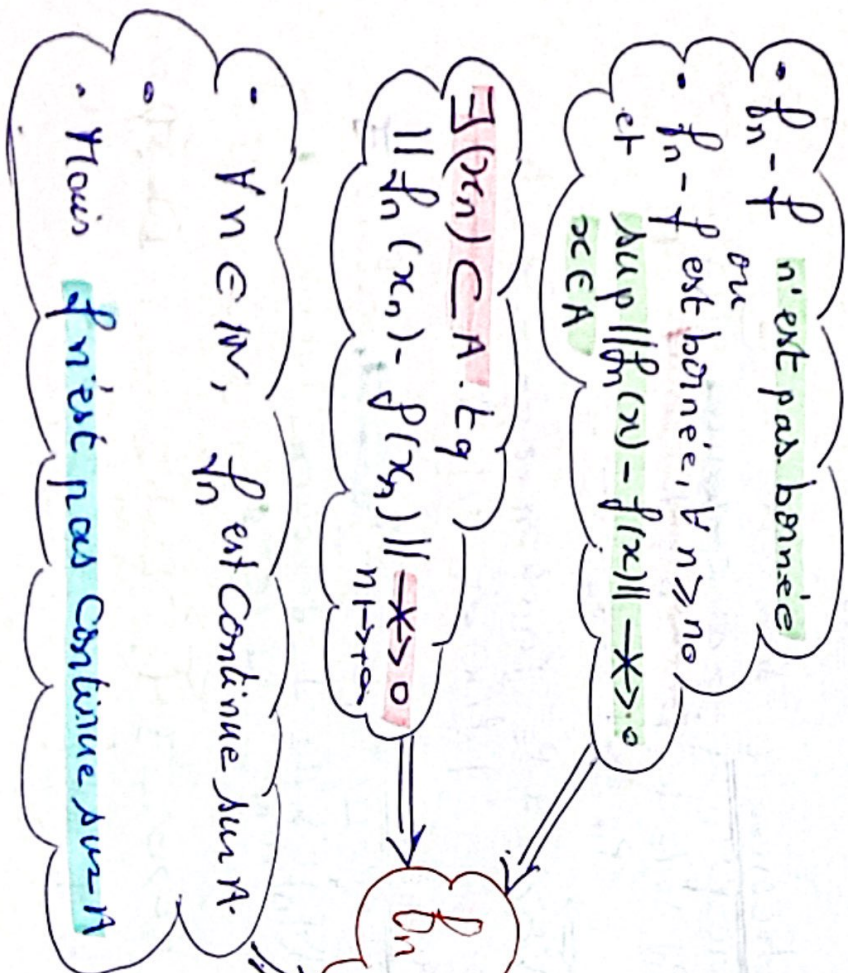
Alors la suite $(L_n) \subset \mathbb{R}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Th de dérivabilité
 $A \subset \mathbb{R}$
 si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n$ est C^1 sur A .
 $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur A .
 $f'_n \xrightarrow{CU} g$ sur A ou sur tout
 seg $[a, b] \subset A$

Alors f est C^1 sur A .
 $f'_n \xrightarrow{CU} f'$ sur tout seg $[a, b] \subset A$
 $f' = g \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x)$

Th
 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n$ est C^p sur A
 $\forall k \leq p-1, f_k \xrightarrow{CS} g_k$ sur A .
 $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur A ou sur
 tout seg $[a, b] \subset A$.

Alors f est de classe C^p
 $f^{(k)} = g_k, \forall 1 \leq k \leq p$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$



Les théorèmes d'approximation

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

$I = \text{intervalle}$

Si $I = [a, b]$

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ continue.
- $f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur $[a, b]$

Appliquons T.C.D.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est} \\ \bullet f_n \xrightarrow{C.S.} f \text{ sur } I. \end{array} \right.$
 soit f est C.T. sur I .
 • $\exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ C.T.
 positive et intégrable sur I .
 (ne dépend pas de n)
 Alors $\forall n \geq n_0, f_n$ est intégrable sur I .
 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Th de convergence dominée générale

- soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.
- Si $\forall t \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = f(t) \exists$ dom K .
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \mapsto \int_I \lambda f_n(x) dx = \lambda \int_I f(x) dx$
- $\exists \varphi \text{ C.T. positive et intégrable sur } I$ (indépendant de n)
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda f_n(x)| \leq \varphi(x), \forall x \in I$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I \lambda f_n(x) dx = \lambda \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lambda \int_I f(x) dx$$

Théorème 1 "de Weierstrass"

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors il existe

(P) suite de fonction polynomiale P_n

$$P_n \xrightarrow{C.U.} f \text{ sur } [a, b]$$

$\Leftrightarrow \exists P_\varepsilon$ fonction polynomiale tq $|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$

Théorème 2.

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C.T., alors

$\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions en escalier tq

$$f_n \xrightarrow{C.U.} f \text{ sur } [a, b].$$

$\Leftrightarrow \exists \varphi_\varepsilon: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier

$$\text{tq } \|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_\infty < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$$