

Suites et Séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, on considère E un e.v.n de dimension finie, A une partie non vide de E et $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n de dimension finie.

I) Suite de fonctions.

* Convergence simple

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F et f une fonction de A vers F . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A et on note C.S si

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x). \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

* Propriétés

- 1) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires de E dans F qui converge simplement vers f , alors f est une application linéaire.
- 2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes (resp. décroissantes) d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f , alors f est croissantes (resp. décroissantes).
- 3) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f , alors f est convexe.

* Remarque

La convergence Simple ne conserve pas la continuité.

Suites et Séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, on considère E un e.v.n de dimension finie, A une partie non vide de E et $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n de dimension finie.

Exemple.

Pour la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a : $f_n(x) = x^n \forall x \in [0, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f donnée par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

* Convergence uniforme

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F et f une fonction de A vers F . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et on note C.U si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > n_0(\varepsilon) \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon, \forall x \in A.$$

Remarque

- 1) Il s'ensuit immédiatement à partir de la définition que si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A , alors elle converge simplement vers f sur A . C.U $\implies$ C.S
- 2) La réciproque est fausse

* Propriétés

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de A vers F et f, g deux fonctions de A vers F et $\lambda \in K$.

- i) Si $\begin{cases} f_n \text{ CU vers } f \text{ sur } A \\ \text{et} \\ g_n \text{ CU vers } g \text{ sur } A \end{cases}$ alors $\lambda f_n + g_n \text{ CU vers } \lambda f + g \text{ sur } A$.

- ii) Si $\begin{cases} f_n \text{ CU vers } f \text{ sur } A \\ \text{et} \\ g \text{ est une fonction bornée de } A \text{ dans } K \end{cases}$ alors gf_n CU vers gf sur A .
- iii) Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F , f une fonction de A vers F .
les fonctions f_n sont bornées à partir d'un certain rang
- Si $\begin{cases} f_n \text{ CU vers } f \text{ sur } A \\ \text{et} \\ f_n \text{ CU vers } f \text{ sur } A \end{cases}$ alors f est bornée sur A .

Critères de convergence uniforme

Proposition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F , f une fonction de A vers F .

$$f_n \text{ CU vers } f \text{ sur } A \text{ SSI } \begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, f_n - f \text{ est bornée} \\ \text{et} \\ \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0. \end{cases}$$

c.à.d.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n > n_0, f_n - f \in \mathcal{B}(A, E) \text{ et } \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ pour la norme } \|\cdot\|_\infty.$$

Proposition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F , f une fonction de A vers E tels que f_n CS vers f .

S'il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \rightarrow 0$, alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur A .

$$(\text{Car : } \|f_n(x_n) - f(x_n)\| \leq \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|.)$$

Exemples

- $f_n(x) = x^n$ avec $x \in [0, 1]$.
 $f_n \xrightarrow{\text{CS}} 0$ et $f_n(1 - \frac{1}{n}) \rightarrow 0$. D'où f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.
- $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
 $g_n \xrightarrow{\text{CS}} 0$ sur $\mathbb{R}$ et $g_n(\frac{\pi}{2n}) \rightarrow 2 \rightarrow 0$. D'où g_n ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme, Limite et Continuité

Théorème de la double limite

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F , f une fonction de A vers F et $a \in \bar{A}$.

- Si $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n \text{ existe dans } F \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } A \text{ ou bien sur un voisinage de } a \end{cases}$

$$\text{alors } \begin{cases} \bullet \text{ La suite } (l_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } F \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n \iff \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \end{cases}$$

Remarque

- Si $A = \mathbb{R}$ le théorème est applicable pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- Le théorème de la double limite est utile aussi pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur une partie A .

Exemple

- $f_n(x) = x^n$ avec $x \in [0, 1]$.
- $f_n(x) = \arctan(nx)$ avec $x \in [0, +\infty[$.

Théorème de continuité

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F et f une fonction de A vers F .

Si $\begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } A \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } A \end{cases}$ ou bien sur tout compact inclu dans A ,
alors f est continue sur A .

Dérivabilité de la fonction limite.

Dans cette partie, on suppose que $A = I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Théorème de dérivabilité

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I vers F et f une fonction de I vers F .

Si $\begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I \\ \bullet (f'_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } I, \text{ ou bien sur tout segment inclu dans } I \end{cases}$
alors $\begin{cases} \bullet f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout segment inclu dans } I \\ \bullet \forall x \in A, f'(x) = g(x). \end{cases}$

Corollaire 1

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I vers E et f une fonction de I vers E , $p \in \mathbb{N}^*$.

Si $\begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } C^p \text{ sur } I \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I \\ \bullet \forall 0 \leq k \leq p, (f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } g_k \text{ sur } I, \\ \bullet (f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } I, \end{cases}$
alors $\begin{cases} \bullet f \text{ est de classe } C^p \text{ sur } I \\ \bullet \forall 0 \leq k \leq p, (f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment inclu dans } I \\ \bullet \forall x \in I, f^{(k)}(x) = g_k(x) \quad \forall 1 \leq k \leq p. \end{cases}$

Corollaire 2

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F et f une fonction de A vers F .

Si $\begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I \\ \bullet \forall p \in \mathbb{N}, (f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } I, \end{cases}$
alors $\begin{cases} \bullet f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \\ \bullet \forall x \in I, f^{(k)}(x) = g_k(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Théorème

Soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$

Si

• La suite (f_n) C.U sur $[a, b]$ vers une fonction f

• f est continue sur $[a, b]$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Cas d'un intervalle quelconque

Théorème de convergence dominée (T.C.D)

Soit $(f_n : I \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I

• La suite (f_n) C.S sur I vers une fonction f

• f est continue par morceaux sur I .

Si

• Il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I (ne dépend pas de n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$, $\forall x \in I$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$$

Exemple

$$1) \text{ Trouver } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} n \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Théorème de convergence dominée généralisé

Soit $(f_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R})_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions continues par morceaux et $a \in \overline{J}$.

• $\forall \lambda \in J$, f_λ est continue par morceaux sur I

• $\forall l \in I$, $\lim_{\lambda \rightarrow a} f_\lambda(l) = f(l)$

• f est continue par morceaux sur I .

Si

• Il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall \lambda \in J$, $|f_\lambda(x)| \leq \varphi(x)$, $\forall x \in I$.

alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow a} \int_I f_\lambda(x) dx = \int_I \lim_{\lambda \rightarrow a} f_\lambda(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Exemple

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\forall x > 0$, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Remarque importante

Pour montrer qu'une suite de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur une partie A , on pourrait montrer l'un des résultats suivant :

- $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0$.
- Il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n$ existe dans E mais la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge ou bien $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A , mais la fonction f n'est pas continue sur A .
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a, b]$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$

Théorèmes d'approximations

Fonction en escalier

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$. On dit que f est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ ($a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$) est une famille de réelles strictement croissante entre a et b avec $a_0 = a$ et $a_n = b$ telles que $\forall 0 \leq k \leq n-1, f|_{[a_k, a_{k+1}]} = \lambda_k \in E$.

Théorème

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe φ_ε une fonction en escalier telle que $\sup_{x \in [a, b]} \|\varphi_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Corollaire

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux. Alors il existe $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions escaliers telle que (φ_n) CU vers f sur $[a, b]$.

$\mathcal{E}([a, b], E)$ est dense dans $\mathcal{CM}([a, b], E)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ avec $\mathcal{E}([a, b], E)$ est l'espace des fonctions en escaliers de $[a, b]$ dans E . $\mathcal{CM}([a, b], E)$ est l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans E .

Application "Lemme de Lebesgue"

1) Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow IK$ une fonction continue par morceaux, montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda x) \varphi(x) dx = 0.$$

(Ind : Vérifier le résultat d'abord pour $\varphi : [a, b] \rightarrow IK$ est une fonction en escalier).

* Théorème de Weierstrass.

Soit $f : [a, b] \rightarrow IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue. Alors il existe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales telle que (P_n) CU vers f sur $[a, b]$. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, il existe P_ε une fonction polynômiale telle que $\sup_{x \in [a, b]} \|P_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon$. $\Leftrightarrow$

$\mathcal{P}([a, b], IK)$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b], IK)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Avec $\mathcal{P}([a, b], IK)$ est l'espace des fonctions polynômiales de $[a, b]$ dans IK .
 $\mathcal{C}([a, b], IK)$ est l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans IK .

Applications

1) Soit $f : [a, b] \rightarrow IK$ une fonction continue telle que

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $f = \hat{0}$.

2) Montrer que pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow IK$ continue on a $d(f, \mathcal{P}([a, b], IK)) = 0$.

II) Séries de fonctions.

1) Convergence simple.

* Définition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers E . On appelle série de fonctions et on note $\sum_{n \geq 0} f_n$ c'est la donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles.

Exemple

$$\sum_{n \geq 0} x^n, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}, \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

* Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers E . On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A et on note C.S si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A . $\Leftrightarrow \forall x \in A$ la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge dans E .

Exemple

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{n^x}{n!}, x \in \mathbb{R}$.

* Définition-Proposition

Si la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A on peut définir la suite de fonctions $(R_n)_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x), \forall x \in A.$$

La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers l'application nulle.

2) Convergence absolue

* Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers E . On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur A et on note C.A si $\Leftrightarrow \forall x \in A$ la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|_F$ converge dans $\mathbb{R}$.

Remarque

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur A , alors elle converge simplement sur A mais la réciproque est fausse.

Exp : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ C.S sur $]0, 1[$ mais ne converge pas absolument.

* Convergence uniforme

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers E . On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A et on note C.U si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A .

Exemple.

$f_n(z) = z^n$, $|z| \leq a$, avec $0 < a < 1$.

* Propriétés

1) Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de A vers E et $\lambda \in K$.

i) Si $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.U sur } A \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} g_n \text{ C.U sur } A \end{array} \right.$ alors $\sum_{n \geq 0} \lambda f_n + g_n$ C.U sur A .

2) Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.U sur A , alors elle converge uniformément sur tout partie $B \subset A$.

* Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A vers F .

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.U sur A , alors la suite (f_n) C.U vers $\tilde{0}$ sur A .

Remarque

Dans certain cas, cette proposition est utile pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur une partie A .

Exp : $\sum_{n \geq 0} x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A vers F .

$$\sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.U. sur } A \text{ SSI } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.S. sur } A \\ \text{et} \\ \text{la suite } (R_n) \text{ C.U. vers l'application } \bar{0} \text{ sur } A. \end{array} \right.$$

Exemple

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Convergence normale

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers F . On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur A et on note C.N s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel

que $\forall n \geq n_0$ f_n est bornée et la série $\sum_{n \geq n_0} \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|$ converge dans $\mathbb{R}$.

1) La série $\sum_{n \geq 0} f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}_+$.

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$.

Propriétés

1) Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de A vers F et $\lambda \in K$.

i) Si $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.N. sur } A \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} g_n \text{ C.N. sur } A \end{array} \right.$ alors $\sum_{n \geq 0} \lambda f_n + g_n$ C.N. sur A .

2) Soit B une partie de A . Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.N. sur A , alors elle converge normalement sur B .

Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A vers F .

La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.N. sur A SSI il existe une suite (α_n) de nombres réels

positifs telles que $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in X \quad \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \text{et} \\ \text{la série } \sum_{n \geq 0} \alpha_n \text{ converge} \end{array} \right.$

Comparaison des modes de convergences

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A vers E .

i) Si la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.N sur A , alors elle C.A sur A et par suite C.S sur A .

ii) Si la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.N sur A , alors elle C.U sur A et par suite C.S sur A .

$$C.N \Rightarrow C.U \Rightarrow C.S$$

$$C.N \Rightarrow C.A \Rightarrow C.S$$

Exercice

Etudier les divers modes de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ avec

i) $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{(1+x)^n}, x \in \mathbb{R}$.

ii) $f_n(x) = n x^2 e^{-x \sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$.

Continuité de la fonction somme.

Théorème de permutation limite et somme

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A vers E et $a \in \bar{A}$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n \text{ existe dans } E \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } A \text{ vers une fonction } S. \end{array} \right.$

• La série $\sum_{n \geq 0} l_n$ converge dans E

• La fonction S admet une limite en a et on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n \iff \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Remarque

1) Si $A = \mathbb{R}$ le théorème est applicable pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

2) Dans certains exemples, Le théorème de permutation limite et somme est utile pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur une partie A .

Théorème de continuité

Soient $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A vers F .

- Si
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A
 - $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers S sur A ,
ou bien converge uniformément vers tout compact inclut dans A ,

alors l'application $S := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A .

Exercice

1) Soit $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \log n}$.

Montrer que S est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Application 1.

On munit $\mathcal{M}_n(IK)$ d'une norme matricielle (c. a. d elle vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(IK)$).

1) Montrer que l'application :

$$\begin{cases} \varphi : \mathcal{M}_n(IK) \longrightarrow \mathcal{M}_n(IK) \\ A \longmapsto \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \end{cases}$$

est définie et continue sur $\mathcal{M}_n(IK)$.

2) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(IK)$ telle que $\|A\| < 1$, montrer que la matrice $I_n - A$

est inversible et que $(I_n - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

b) Montrer que l'application :

$$\begin{cases} \psi : \mathcal{B}(O, 1) \longrightarrow \mathcal{M}_n(IK) \\ A \longmapsto (Id - A)^{-1} \end{cases}$$

est continue sur $\mathcal{B}(O, 1)$.

Application 2

On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes sur E ($\dim(E) < \infty$) muni d'une norme qui vérifie $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|, \forall f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1) l'application :

$$\begin{cases} \varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f \longmapsto \exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!} \end{cases}$$

est continue sur $\mathcal{L}(E)$.

2) l'application

$$\begin{cases} \psi : \mathcal{B}(O, 1) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f \longmapsto (Id - f)^{-1} \end{cases}$$

est continue sur $\mathcal{B}(O, 1)$.

Théorème de dérivation

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}$ vers E et f une fonction de A vers E .

• $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^1 sur A

Si

- La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers S sur A ,
- La série $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur A

ou bien sur tout segment inclut dans A .

• La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de A et

alors

- S est de classe C^1 sur A

$$\forall x \in A, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

Somme de classe C^p

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers E , f une fonction de A vers F , $p \in \mathbb{N}$.

- Si
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^p sur A
 - $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers S sur A
 - $\forall 0 \leq k \leq p-1$, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge simplement vers $S^{(k)}$ sur A ,
(ou bien) converge uniformément tout compact incluant A ou bien sur tout segment incluant A .
- alors
- $\forall 0 \leq k \leq p-1$, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément tout segment incluant A
 - S est de classe C^p sur $A \subseteq \mathbb{R}$
 - $\forall x \in A$, $S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) \quad \forall 1 \leq k \leq p$.

Somme de classe C^∞

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers E , f une fonction de A vers E .

- Si
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur A
 - $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers S sur A
 - $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur A ,
(ou bien) converge uniformément tout segment incluant A
- alors
- S est de classe C^∞ sur A
 - $\forall x \in A$, $S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Application.

On munit $\mathcal{M}_p(IK)$ d'une norme matricielle (c. a. d. elle vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_p(IK)$). 1) Soit $A \in \mathcal{M}_p(IK)$, l'application :

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_p(IK) \\ t \mapsto \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \end{cases} \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^{(k)}(t) = A^k \exp(tA), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Intégration d'une série de fonctions.

Intégration d'une série de fonctions.

* Théorème 1 Cas d'un segment $[a, b]$

Soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions de $[a, b] \rightarrow E$.

- Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [a, b] \\ \bullet \text{ La série } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ C.U.U sur } [a, b] \text{ vers une fonction } S \end{array} \right.$

- alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [a, b] \\ \bullet \text{ La Série } \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx \text{ converge dans } E \\ \bullet \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx \end{array} \right.$

💡 Remarque importante

Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ ne converge pas uniformément sur une partie A , on pourrait montrer l'un des résultats suivant :

• la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers l'application $\tilde{0}$ sur A .

• la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers l'application $\tilde{0}$ sur A .

• Pour $a \in \bar{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n$ existe dans E mais la série $\sum_{n=0}^{+\infty} l_n$ diverge dans E

ou bien

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A , mais l'application $S := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ n'est pas continue sur A

• Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$ mais $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Cas d'un intervalle quelconque

Théorème d'intégration terme à terme (TTTT)

Soit $(f_n : I \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continue par morceaux.

• $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable sur I

• La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.S. sur I vers une fonction S

Si S est continue par morceaux sur I

• La série $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(x)| dx$ converge

alors

• $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I

• $\int_I S(x) dx = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx$

Autres méthodes de permutations.

Si le théorème d'intégration terme à terme n'est applicable, on pourra appliquer l'une des méthodes suivantes :

1) Appliquer T.C.D. à la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles.

$$\int_I S(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) dx$$

2) Méthode du reste.

La méthode du reste consiste à faire les étapes suivantes :

$$\text{Ecrire } S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable sur I .

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est intégrable sur I .

$$\text{Ecrire } \int_I S(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_I f_k(t) dt + \int_I R_n(t) dt,$$

puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I R_n(t) dt = 0$.

En fin déduire, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ que $\int_I S(t) dt =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$