

Problèmes

Série de fonctions

Problème 1

I) On considère $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$, $x > 0$.

1) Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer le signe de g .

2) Calculer $g(1)$.

3) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Montrer que g est de classe C^∞ , puis déterminer le signe de g' et de g'' .

5) a) Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire un équivalent de g quand x tend vers 0.

6) a) Montrer que $\forall x > 0$, $g(x+1) - xg(x) = -\frac{1}{e}$.

b) Retrouver la valeur de $g(1)$ et calculer $g(2)$.

7) a) Montrer que $\forall x > 0$, $0 \leq (x-1)g(x) \leq \frac{1}{e}$.

b) En déduire la limite de g quand x tend vers $+\infty$.

8) Déterminer un équivalent de g quand x tend vers $+\infty$.

II) Soit $x \geq 1$, on pose Φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\Phi_x(u) = u^{x-1}e^{-u}$.

1) a) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^{x+n-1} du$.

b) Montrer que $\forall x \geq 1$, $g(x) = \int_0^1 u^{x-1}e^{-u} du$.

2) Calculer $\int_0^1 \cos((x+n)\pi t) dt$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère les deux sommes suivantes :

$$S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n!} \quad \text{et} \quad \sigma(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n!}.$$

3)a) Calculer $S(a)$ et $\sigma(a)$.

b) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((n+x)\pi t)}{n!} = e^{\cos(\pi t)} \cos(\pi t x + \sin(\pi t))$.

4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, $g(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 e^{\cos(\pi t)} \cos(\pi t x + \sin(\pi t)) dt$.

Problème 2

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

pour tout $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose