

Problème

Série de Fourier et application à l'étude d'une équation aux dérivées partielles

Préliminaire

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels ou complexes.
On dit que la famille $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que $|v_n| \leq k$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

On dit que la famille $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si les séries $\sum_{n \geq 0} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_{-n}$ sont absolument convergentes.

Si $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, on pose $\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_{-n}$.

1. Soit $\alpha > 1$. Justifiez que la famille $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{Z}^*}$ est sommable.
2. Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont deux familles sommables, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ la famille $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.
3. Montrer que la famille $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si la suite $(S_n = \sum_{k=-n}^n |v_k|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux familles de nombres réels ou complexes telles que :

$$|v_n| \leq |u_n|, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que si la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, alors la famille $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

5. Montrer que si $v_n = o(\frac{1}{n^2})$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sommable.

Dans la suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{C}_{2\pi}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions 2π -périodiques et de classe k sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$.

1^{ère} Partie

Quelques résultats préliminaires utiles

1.1. Noyau de DIRICHLET

Pour tout $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on pose

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $D_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto D_n(\theta)$ s'appelle *noyau de Dirichlet*.

1.1.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application D_n est paire et 2π -périodique.

1.1.2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$.

1.1.3. Montrer que, pour tout $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $D_n(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} & \text{si } \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n+1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

1.2. Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

1.2.1. Justifier que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.2.2. Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{a-\pi}^{a+\pi} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt$.

1.3. Lemme de LEBESGUE

Soient a et b des réels tels que $a < b$, et soit $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n(h) = \int_a^b h(t) \sin((2n+1)t/2) dt.$$

1.3.1. Vérifier que si h est une fonction constante, alors la suite $(J_n(h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.3.2. Montrer que si h est en escalier sur $[a, b]$, alors la suite $(J_n(h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.3.3. En utilisant un résultat d'approximation à préciser, montrer que la suite $(J_n(h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2^{ème} Partie

Convergence normale de la série de FOURIER

d'un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $k \geq 2$

Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On lui associe la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_0(f)(x) = c_0(f) \quad \text{et} \quad u_n(f)(x) = c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*.$$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n(f)$ s'appelle la *série de Fourier* de f ; les complexes $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, s'appellent les *coefficients de FOURIER* de f .

2.1. Quelques propriétés des coefficients de FOURIER

2.1.1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in c_n(f)$.

2.1.3. En déduire que, pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$.

2.2. Convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n(f)$ pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2.2.1. Montrer que la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

2.2.2. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n(f)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

2.3. Convergence ponctuelle de la série $\sum_{n \geq 0} u_n(f)$ pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: Théorème de DIRICHLET

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on pose $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n u_k(f)(x)$.

2.3.1. Vérifier que, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$.

2.3.2. Montrer que, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$.

2.3.3. En déduire que, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} dt.$$

2.3.4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note g_x la fonction définie sur le segment $[-\pi, \pi]$ par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad g_x(t) = \begin{cases} \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ -2f'(x) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g_x est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et que la suite $(S_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Théorème de DIRICHLET.

2.4. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Justifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à la fonction f .

3^{ème} Partie

Application à l'étude d'une équation aux dérivées partielles

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels telle que la famille $(n^6 a_n^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ soit sommable. On lui associe la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = a_0 \quad \text{et} \quad f_n(x) = a_n e^{inx} + a_{-n} e^{-inx} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*.$$

3.1. Une question de sommabilité

3.1.1. Montrer que la famille $(n^2 a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |a_n| \leq \sqrt{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^6 a_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}.$$

3.1.2. En déduire que les familles $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(na_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont sommables.

3.2. Construction d'un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

3.2.1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on note f la somme de cette série : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

3.2.2. Justifier que la fonction f est 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

3.2.3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

3.2.4. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite du sujet, on se propose de résoudre le problème suivant :

Il existe une unique application $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, t) \mapsto v(x, t)$ continue telle que :

(i) pour tout réel t , la fonction $x \mapsto v(x, t)$ est 2π -périodique;

(ii) les dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ existent, sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et vérifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + i \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad v(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

3. Existence d'une solution du problème

On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad w_n(x, t) = f_n(x) e^{-in^2 t}.$$

3.3.1. Vérifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} w_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^2$.

On note w la somme de cette série :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad w(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) e^{-in^2 t}.$$

3.3.2. Justifier que w est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que, pour tout réel t , la fonction $x \mapsto w(x, t)$ est 2π -périodique.

3.3.3. Montrer que la fonction w , définie ci-dessus, possède en tout point de $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle première par rapport à t et exprimer $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t)$, pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, sous la forme de la somme d'une série. Justifier que cette dérivée partielle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.4. Montrer de même que la fonction w possède en tout point $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ des dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t)$ par rapport à x et les exprimer sous la forme de sommes de séries. Justifier que ces deux dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.5. Montrer alors que la fonction w est bien solution du problème posé.

4. Unicité de la solution du problème

Soit v une solution du problème; on pose $b_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x, t) e^{-inx} dx$, $(n, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

On lui associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad v_0(x, t) = b_0(t) \quad \text{et} \quad v_n(x, t) = b_n(t) e^{inx} + b_{-n}(t) e^{-inx} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*.$$

3.4.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction b_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle

$$y' + in^2 y = 0.$$

3.4.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $b_n(0)$ en fonction de a_n et en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad b_n(t) = a_n e^{-in^2 t}.$$

3.4.3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} v_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad v(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) e^{-in^2 t} = w(x, t).$$

On pourra utiliser la question 2.4. de la deuxième partie.

FIN DE L'ÉPREUVE