

Révision Analyse S-1 "

Problème 1 "d'après MP2017"

Partie I

Soit $a > 0$ fixé.

1. Pour quelles valeurs du réel s la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)^s}$ est elle convergente. On pose sous cette condition

$$\psi_a(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

2. Montrer que $\forall s > 1, \psi_a(s) = \frac{1}{a^s} + \psi_{a+1}(s)$.

3. Montrer que ψ_a est continue sur $]1, +\infty[$.

4. (a) Montrer que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \psi_a(s) = +\infty$ lorsque $a \geq 1$.

- (b) Déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi_a(s)$ lorsque $a \geq 1$.

- (c) En déduire $\lim_{s \rightarrow 1^+} \psi_a(s)$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi_a(s)$, lorsque $0 < a < 1$.

- (d) A-t-on la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ de la série de fonction $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)^s}$.

5. (a) Soient α, β deux réels tels que $\alpha > 1$. Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est convergente.

- (b) Montrer que ψ_a est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et donner l'expression de ses dérivées successives sous la forme de la somme d'une série.

6. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ converge, si et seulement si, $s > 0$.

On pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, s > 0$.

- (b) Montrer que pour tout $s > 0, \Gamma(s) > 0$ et $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

- (c) Montrer que pour tout $s > 1, \psi_a(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}} e^{-ax} dx$.

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que $a = 1$ et on note $\psi(s) = \psi_1(s), s > 1$.

Partie II

Pour tout réel x , on note $E(x)$ sa partie entière : C'est l'unique entier relatif vérifiant $x - 1 < E(x) \leq x$.

1. Soit $s > 0$. Montrer que l'application $f_s : x \mapsto \frac{E(x)-x}{x^{s+1}}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que l'application $F : s \mapsto \int_1^{+\infty} f_s(x) dx$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\psi(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + sF(s)$. (On pourra remarquer que pour tout entier

$$N \geq 2, \int_1^N f_s(x) dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f_s(x) dx.$$

4. Montrer que la suite $\left(\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right)$ est convergente.

(On pourra étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} (\gamma_n - \gamma_{n-1})$).

On note $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$.

5. Montrer que $F(1) = \gamma - 1$.

6. Montrer alors que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\psi(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$.

Problème 2 "d'après MP2016"

Partie I

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que $a_n \neq -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. On pose $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$.

On dit que le produit infini $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ converge si la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite non nulle. Cette limite se note $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(|p_n|) \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.
2. On suppose la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est absolument convergente.

On veut prouver que le produit infini $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ converge.

- (a) Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
- (b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} (p_n - p_{n-1})$ est absolument convergente.
- (c) En déduire que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- (d) On pose $b_n = -\frac{a_n}{1 + a_n}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ est absolument convergente.
- (e) En déduire que la suite $\left(\frac{1}{p_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- (f) Montrer alors que le produit infini $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ converge.

Dans la suite de ce problème, on pose pour $a \in \mathbb{C}$,

$$u_n(a) = \begin{cases} a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1) & \text{si } n \geq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Partie II

1. Vérifier que, pour tout entier n ,

$$u_{n+1}(a) = (a+n)u_n(a) = au_n(a+1).$$

2. On suppose que $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. On pose $f_a(x) = (1-x)^{-a}$, $x < 1$.

- (a) Montrer que f_a est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux.
 (b) En déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(a)}{n!} x^n.$$

3. Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. On pose pour $G_n(x) = \frac{n! n^{x-1}}{u_n(x)}$, $n \geq 1$.

- (a) Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 1} (1 + \frac{1}{n})^x (1 + \frac{x}{n})^{-1}$ est convergent.
 (b) En déduire que la suite $(G_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ vers une fonction G et que

$$G(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^x (1 + \frac{x}{n})^{-1}.$$

(c) Montrer que

$$u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n! n^{x-1}}{G(x)}.$$

(d) Montrer que $G(1) = 1$.

(e) Montrer que $G(x+1) = xG(x)$ et que plus généralement, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k(x) = \frac{G(x+k)}{G(x)}$.

Problème 3 "d'après MP2013"

Les fonctions Γ et β d'Euler

On pose, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

1. Soit $x > 0$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x)) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right)$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (\ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x)))$ est convergente.

(c) En déduire que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers une limite $f(x) \in]0, +\infty[$.

2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f(x+1) = xf(x)$$

(b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(p+1) = p!$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x, y > 0$.

On pose alors, pour tout $x, y > 0$,

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

4. Soient $x, y > 0$.

(a) Montrer que

$$\beta(x, y) = \frac{x+y}{y} \beta(x, y+1)$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\beta(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1) \cdots (x+y+n)}{y(y+1) \cdots (y+n)} \beta(x, y+n+1)$$

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta(x, y) = \frac{f_n(y)}{f_n(x+y)} \int_0^n u^{x-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{y+n} du$$

5. En utilisant le théorème de la convergence dominée, montrer que, pour tout $x, y > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n u^{x-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{y+n} du = \Gamma(x)$$

où

$$\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

désigne la fonction Gamma d'Euler.

6. Montrer alors que

$$\beta(x, y) = \frac{f(y)}{f(x+y)} \Gamma(x)$$

7. Soient $x, y > 0$.

(a) Calculer $\beta(x, 1)$.

(b) Montrer que

$$(i) \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

$$(ii) \quad \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

8. (a) En utilisant le changement de variable $t = \sin^2 \theta$, calculer $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) En déduire que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

(c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{4^p p!} \sqrt{\pi}$$

Problème 4 "d'après MP2023"

Soit $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{C}[0, 1] : g(0) = 0\}$ et on désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynomiales.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un hyperplan fermé de $\mathcal{C}[0, 1]$.

Indication : On pourra utiliser l'application $g \mapsto g(0)$.

On note $\mathcal{P}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \{f \in \mathcal{P} : f(0) = 0\}$ et on fixe $g \in \mathcal{F}$.

2. Justifier qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g sur $[0, 1]$.

En déduire que la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $Q_n = P_n - P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers g sur $[0, 1]$ et que $\overline{\mathcal{P}_0} = \mathcal{F}$.

On fixe $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ et on pose $g(t) = h(-\ln t)$, $t \in]0, 1]$.

3. Justifier que g se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$, notée encore par g , et qui appartient à $\mathcal{F}$. Comparer $N_\infty(h)$ et $\|g\|_\infty$.
4. En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(x \mapsto e^{-x} P_n(e^{-x}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers h .

Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ formé des fonctions de la forme $h(x) = e^{-x} P(x)$ où $P \in \mathcal{P}$. On souhaite montrer dans la suite que $\mathcal{D}$ est une partie dense de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$. On pose $e_k(x) = e^{-kx}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}^*$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$. Justifier l'inégalité suivante :

$$|e^{-2x} - e^{-x} A_n(x)| \leq \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^n e^{-x} \leq n^n e^{-n}$. En déduire que $e_2 \in \overline{\mathcal{D}}$.

Soit n un entier ≥ 2 tel que $e_n \in \overline{\mathcal{D}}$. On se propose de démontrer que $e_{n+1} \in \overline{\mathcal{D}}$. On fixe $\varepsilon > 0$, il résulte de la question

7. qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}$ vérifiant

$$|e^{-2y} - e^{-y} P(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour tout } y \geq 0.$$

On pose $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |e^{-x} P(x)|$.

8. Justifier qu'il existe un polynôme B_n vérifiant

$$|e^{-(n+1)x} - e^{-nx/2} e^{-x/2} B_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

9. Montrer qu'il existe un polynôme Q vérifiant

$$|e^{-nx/2} - e^{-x/2} Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2M+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Indication : Remarquer que $e_n \in \overline{\mathcal{D}}$.

10. En déduire qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tel que $|e^{-(n+1)x} - \varphi(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et conclure que $e_{n+1} \in \overline{\mathcal{D}}$.
11. Montrer alors que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$.