

- continue sans problème comme inverse d'une fonction continue à dénominateur non nul.
- intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur le segment.
- intégrable sur $[1, +\infty[$ car équivalente en $+\infty$ à $\frac{1}{t^2}$

La fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}$ majorée par $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$

3a) Sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ on peut poser pour $x \neq 0$ $u(t) = \frac{-1}{2i\pi x} e^{-2i\pi t x}$ et $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $[a, b]$ et donc :

$$\int_a^b \frac{e^{-2i\pi t x}}{1+t^2} dt = \frac{-1}{2i\pi x} \left[\frac{e^{-2i\pi t x}}{1+t^2} - \frac{e^{-2i\pi t x}}{1+a^2} \right] + \frac{1}{2i\pi x} \int_a^b \frac{-2te^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2} dt$$

Pour tout x réel la fonction $t \mapsto \frac{-2te^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ majorée en module par $\phi(t) = \frac{2|t|}{(1+t^2)^2}$. La fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ car équivalente à $\frac{1}{|t|^3}$ en $\pm\infty$. On peut donc passer à la limite dans l'intégration par partie. Or

$$\left| \frac{e^{-2i\pi t x}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} \rightarrow_{b \rightarrow +\infty} 0, \text{ et } \left| \frac{e^{-2i\pi t x}}{1+a^2} \right| \leq \frac{1}{1+a^2} \rightarrow_{a \rightarrow -\infty} 0$$

d'où :

$$\boxed{\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{i\pi x} \int_{\mathbb{R}} \frac{-te^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2} dt}$$

comme $\frac{1}{t} = -i$ on a la relation voulue pour $x \neq 0$ en multipliant par πx .

Pour $x = 0$ le membre de gauche est continue car F est continue. Le membre de droite est aussi continue car $\psi(x, t) = \frac{te^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ dominée par $\phi(t) = \frac{2|t|}{(1+t^2)^2}$ continue intégrable sur $\mathbb{R}$. L'égalité est donc vraie en $x = 0$ par continuité.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \pi x F(x) = i \int_{\mathbb{R}} \frac{te^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2} dt}$$

Le membre de droite est la transformée de Fourier de la fonction continue intégrable $t \mapsto \frac{it}{(1+t^2)^2}$. D'après

1d) il est donc majoré en module par $\int_{\mathbb{R}} \frac{|t|}{(1+t^2)^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = 2 \left[\frac{1}{2(1+t^2)} \right]_0^{+\infty} = 1$

$$\boxed{\forall x \neq 0, |F(x)| \leq \frac{1}{\pi|x|}}$$

A noter l'erreur de texte : x doit être non nul pour que l'expression soit définie.

On a donc

$$\boxed{\lim_{\pm\infty} (F) = 0}$$

3b) Soit $\theta(x, t) = \frac{te^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2}$. θ vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$:

- $\theta \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ comme produit et quotient à dénominateur non nul de telles fonctions.
- Avec les notations du **3a)** θ est dominée par la fonction ϕ continue intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x .
- $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = -2i\pi \frac{t^2 e^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2}$ est dominée par $2\pi \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$, donc par $\frac{2\pi}{(1+t^2)}$ continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x .

La fonction $\Theta(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x, t) dt$ est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) dt = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 e^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2} dt$.

Comme $F(x) = \frac{i\Theta(x)}{\pi x}$ la fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient à dénominateur non nul de fonctions C^1 .

En dérivant la relation (1) et en simplifiant par π on a donc :

$$F(x) + xF'(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 e^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2} dt$$

Or $t^2 = (1+t^2) - 1$ donc :

$$F(x) + xF'(x) = 2 \left(F(x) - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2} dt \right)$$

D'où par changement de membre :

$$\boxed{F(x) - xF'(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2} dt}$$

3c) On pose maintenant $\gamma(x, t) = \frac{e^{-2i\pi t x}}{(1+t^2)^2}$ et $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(x, t) dt$.

- La fonction γ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$

$t \mapsto \gamma(x, t)$ continue car

- $|\gamma(x, t)| \leq \frac{1}{(1+t^2)^2}$ indépendant de x , continue intégrable sur $\mathbb{R}$ car équivalent à $\frac{1}{t^4}$ en $\pm\infty$
- $\left| \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2\pi \frac{|t|}{(1+t^2)^2}$ indépendant de x , continue intégrable sur $\mathbb{R}$ car équivalent à $\frac{1}{|t|^3}$ en $\pm\infty$

Γ est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc $F'(x) = \frac{F(x) - 2\Gamma(x)}{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
En dérivant la relation (2) on déduit :

$$xF'''(x) = 4i\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{te^{-2i\pi tx}}{(1+t^2)^2} dt$$

On retrouve l'expression du **3a**) : $xF'''(x) = 4\pi^2 xF(x)$. Soit en simplifiant par x :

$$\boxed{F''' = 4\pi^2 F}$$

3d) On a $F(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$

- Sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a d'après l'équation différentielle $F(x) = Ae^{-2\pi x} + Be^{2\pi x}$. Comme $\lim_{+\infty}(F) = 0$ on a $B = 0$ puis, comme les deux membres sont continues en 0 et que $F(0) = \pi$ on a $A = \pi$:

$$x \geq 0, F(x) = \pi e^{-\pi x}$$

- Sur $\mathbb{R}^{-*}$ on a d'après l'équation différentielle $F(x) = Ae^{-2\pi x} + Be^{2\pi x}$. Comme $\lim_{-\infty}(F) = 0$ on a $A = 0$ puis par continuité comme $F(0) = \pi$ on a $B = \pi$:

$$x \leq 0, F(x) = \pi e^{\pi x}$$

4a) En reprenant les notations de la question **2c)** on a déjà que $\phi(x, t) = e^{-2i\pi xt} f(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ dominée par la fonction f continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x . De plus ϕ est bien C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x} = (-2i\pi) e^{-2i\pi xt} (tf(t))$ est dominée par $2\pi |tf(t)|$ fonction continue, indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. F est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver sous le signe $\int$.

$$\boxed{\text{si } tf(t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}, F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } F' = -2i\pi T(t- > tf(t))}$$

De façon plus générale si la fonction $t- > t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $p < k$ la fonction $t- > t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $|t^p f(t)| \ll_{+\infty} |t^k f(t)|$). Donc la dérivée $\frac{\partial^p \phi}{\partial x^p} = (-2i\pi)^p e^{-2i\pi xt} (t^p f(t))$ est dominée par $|t^p f(t)|$ continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendante de x . donc

$$\boxed{F \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } (T(f))^{(k)} = (-2i\pi)^k T(t- > t^k f(t))}$$

Remarque l'exemple de la question 3) montre que le résultat peut-être faux si on retire l'hypothèse d'intégrabilité. Dans cet exemple F n'est pas dérivable en 0. Mais $tf(t)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

4b) Si f' est intégrable sur $\mathbb{R}$ $f(t) = f(0) + \int_0^t f'$ admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Si cette limite est non nulle alors f est équivalente à sa limite et n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{(f \text{ et } f' \text{ intégrables sur } \mathbb{R}) \Rightarrow (\lim_{\pm\infty}(f) = 0)}$$

On a alors $T(f') = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} f'(t) dt$ que l'on va intégrer par parties en posant $u(t) = f(t)$ et $v(t) = e^{-2i\pi xt}$. Les fonctions u et v sont bien C^1 sur $\mathbb{R}$. $u'v = e^{-2i\pi xt} f'(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $uv' = (-2i\pi x) e^{-2i\pi xt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car proportionnel à la transformée de Fourier de la fonction intégrable f . Enfin $|uv| = |f|$ a une limite nulle quand t tend vers $\pm\infty$. En intégrant sur un segment et en passant à la limite comme au **3a)** on a :

$$\boxed{T(f') = 2i\pi x T(f)}$$

Par récurrence on a alors :

$$\boxed{(\forall p \leq k, f^{(k)} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}) \Rightarrow (T(f^{(k)}) = (2i\pi x)^k T(f))}$$

5) La fonction $f(t) = e^{-\pi t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $f, tf(t)$ et $f' = -2\pi t e^{-\pi t^2}$ sont négligeables en $\pm\infty$ devant $e^{-|t|}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer les résultats du **4a)** et du **4b)**.

5a) On a la relation $f'(t) = -2\pi t f(t)$ donc par linéarité de la transformée de Fourier : $T(f') = -2\pi T(t- > tf(t))$. Mais d'après la question précédente $T(f') = 2i\pi x T(f)$. Donc $ixT(f) = T(t- > tf(t))$. On a aussi montrer que $(T(f))' = -2i\pi T(t- > tf(t))$ donc : $\boxed{-2\pi x T(f) = (T(f))'}$

5b) Comme le coefficient de $(T(f))'$ est toujours non nul on peut intégrer l'équation sur $\mathbb{R}$.

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = K e^{-\pi x^2}$$

Or $F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{\pi}t)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv$ par changement de variable affine $v = \sqrt{\pi}t$. Par parité de la fonction on a donc : $F(0) = 2 \int_{\mathbb{R}^+} e^{-v^2} dv = 1$.

$$\boxed{F(x) = e^{-\pi x^2}}$$

Dans les deux exemples on part d'une fonction f réelle pour trouver une fonction F réelle. Ce n'est pas toujours le cas. C'est une conséquence du fait que les deux fonctions f prises en exemple sont paires.

6) Toute la question a pour but d'étudier la limite en $+\infty$. On supposera donc $x > 0$ sans chercher à traiter le cas particulier $x = 0$.

6a) On a :

$$\int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} \phi(t) dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-2i\pi xt} \phi_k dt = \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{e^{-2i\pi xt}}{-2i\pi x} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} \phi_k$$

chaque terme de la somme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} \phi(t) dt \right) = 0$.

6b faux Le raisonnement qui suit est faux car **A n'est pas indépendant de x**

Comme la fonction est intégrable on sait que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} f(t) dt \right) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} f(t) dt = F(x)$. Donc en écrivant la limite avec des quantificateurs :

$$\forall x > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists A_{x,\varepsilon}, A \geq A_{x,\varepsilon} \Rightarrow \left| F(x) - \int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} f(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

6b juste : il faut majorer par des quantités indépendantes de x :

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} f(t) dt \right| &= \left| \int_A^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t) dt + \int_{-\infty}^{-A} e^{-2i\pi xt} f(t) dt \right| \leq \int_A^{+\infty} |f(t)| dt + \int_{-\infty}^{-A} |f(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt - \int_{-A}^A |f(t)| dt \end{aligned}$$

L'intégrabilité de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ permet alors de conclure $\lim \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt - \int_{-A}^A |f(t)| dt \right) = 0$ donc :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon, A \geq \varepsilon \Rightarrow \left(\forall x > 0, \left| F(x) - \int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} f(t) dt \right| \leq \varepsilon \right)}$$

6c) On a admis dans le cours que toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions en escalier. Donc $\exists (\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier telle que $\lim \left(\sup_{[-A,A]} (|f - \phi_n|) \right) = 0$. Donc

$$\forall \alpha > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow \sup_{[-A,A]} (|f - \phi_n|) \leq \alpha$$

En prenant $\alpha = \frac{\varepsilon}{2A}$ puis $\phi = \phi_N$ on a une solution du problème.

6d) Reste à majorer $|F(x)|$ pour $x > 0$ en partant de $f(x) = f(x) - \phi(x) + \phi(x)$ et

$$|F(x)| \leq \left| F(x) - \int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} f(t) dt \right| + \left| \int_{-A}^A (f(t) - \phi(t)) e^{-2i\pi xt} dt \right| + \left| \int_{-A}^A \phi(t) e^{-2i\pi xt} dt \right|$$

On se fixe un $\varepsilon > 0$. La question **6b)** nous donne un A qui ne dépend que de ε et tel que

$$\left| F(x) - \int_{-A}^A e^{-2i\pi xt} f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

La question **6c)** nous donne une fonction ϕ en escalier sur $[-A, A]$ et qui dépend de A et de ε (donc seulement de ε) et telle que $\sup_{[-A,A]} (|f - \phi_n|) \leq \frac{\varepsilon}{2A}$. On a alors

$$\left| \int_{-A}^A (f(t) - \phi(t)) e^{-2i\pi xt} dt \right| \leq \int_{-A}^A |f(t) - \phi(t)| dt \leq \int_{-A}^A |f(t) - \phi(t)| dt = \varepsilon$$

La question **6a)** nous donne alors un X qui dépend de A et de ϕ (donc uniquement de ε) tel que

$$\forall x \geq X, \left| \int_{-A}^A \phi(t) e^{-2i\pi xt} dt \right| \leq \varepsilon$$

Si on réunit les trois :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X, (x \geq X \Rightarrow |F(x)| \leq 3\varepsilon)$$

$$\boxed{\lim_{+\infty}(F) = 0}$$

On a exactement de la même façon $\lim_{-\infty}(F) = 0$