

MATHEMATIQUES 1

I. Généralités

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ existe. Ensuite,
- Si $x \leq 0$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est grossièrement divergente. Dans ce cas, $\Gamma(x)$ n'existe pas.
 - Si $x > 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ est alternée en signe et sa valeur absolue, à savoir $\frac{1}{n^x}$, tend vers 0 en décroissant. On en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc que $F(x)$ existe.

F est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $t \in [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$ (car $t \neq -1$).

Puisque $|-t| < 1$, $g_n(t)$ tend vers $\frac{1}{1+t}$ quand n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$.

- Chaque fonction g_n est continue et intégrable sur $[0, 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

- La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction g qui est continue sur $[0, 1]$.
- Soient $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$|g_n(t)| = \left| \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{1 + |(-t)^{n+1}|}{1+t} \leq \frac{2}{1+t} = \varphi(t),$$

où la fonction φ est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur ce segment.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^1 g_n(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(t) dt = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2.$$

Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = F(1),$$

et donc

$$F(1) = \int_0^1 g(t) dt = \ln 2.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x > 0$, posons $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Pour $x \geq 2$, on a $|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^2}$ et donc $\sup\{|f_n(x)|, x \in [2, +\infty[) \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série numérique de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge normalement vers F sur $[2, +\infty[$.

La série de fonctions de terme général $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$, $n \geq 1$, converge normalement sur $[2, +\infty[$.

La série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge normalement et donc uniformément vers F sur $[2, +\infty[$. De plus, chaque fonction f_n , $n \geq 1$, a une limite réelle ℓ_n quand x tend vers $+\infty$ à savoir $\ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$.

Le théorème d'interversion des limites permet alors d'affirmer que

- La série numérique de terme général ℓ_n , $n \geq 1$, converge;
- F a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1 + 0 + \dots = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

4. Dérivabilité de F .

(a) Soit $x > 0$. la fonction $u : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $t > 0$,

$$u'(t) = \frac{1}{t} \times \frac{1}{t^x} + \ln t \times \frac{-x}{t^{x+1}} = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}.$$

$u'(t)$ est du signe de $1 - x \ln t$ sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction u est strictement croissante sur $]0, e^{1/x}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$. Mais alors, pour $n \geq n_0 = E(e^{1/x}) + 1$, on a $u(n) \geq u(n+1)$ et donc

$\forall x > 0$, la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ décroît à partir du rang $n_0 = E(e^{1/x}) + 1$.

(b) Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour $x \geq a$, $f'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$.

Soit $x \geq a$. La suite numérique $(f'_n(x))$ est alternée en signe, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la question (a) montre que la suite $(|f'_n(x)|)$ décroît à partir du rang $E(e^{1/x}) + 1$. Ainsi, la série numérique de terme général $f'_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore la série de fonctions de terme général f'_n converge simplement sur $[a, +\infty[$.

Soit $n \geq E(e^{1/a}) + 1 = n_0$. Pour $x \geq a$, on a $E(e^{1/x}) + 1 \leq E(e^{1/a}) + 1$ et donc $n \geq E(e^{1/x}) + 1$. La question (a) montre alors que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Mais alors, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^x} \right| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a},$$

et donc, pour $n \geq E(e^{1/a}) + 1$, $\sup \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x) \right|, x \in [a, +\infty[\right\} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$, on a montré que la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé,

- La série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge simplement vers F sur $[a, +\infty[$;
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$;
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après un théorème de dérivation terme à terme, F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et $F' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$. Ce résultat étant valable pour tout réel $a > 0$, on a montré que

$$F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0, F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}.$$

5. Lien avec ζ . Soit $x > 1$. Déjà, $\zeta(x)$ est défini.

Ensuite, si n est un entier impair, $(-1)^{n-1} - 1 = 0$ et si n est un entier pair, $(-1)^{n-1} - 1 = -2$ et donc

$$F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2p)^x} = -2^{1-x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = -2^{1-x} \zeta(x),$$

et donc, $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

$$\forall x \in]1, +\infty[, F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{1-x} = 0 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1.$$

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6. Étude de la convergence

(a) Soit $x > 1$. La série numérique de terme général $\frac{1}{n^x}$ est convergente ou encore la série de terme général $a_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est absolument convergente. On sait alors que la série produit de CAUCHY de la série de terme général $a_n(x)$ par elle-même est convergente et a pour somme $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)\right)^2$ ou encore $(F(x))^2$.

$$\forall x > 1, \sum_{n \geq 2} c_n(x) \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = (F(x))^2.$$

(b) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.

Déjà $c_0(x) = a_0(x)^2 = 0$ et $c_1(x) = a_0(x)a_1(x) + a_1(x)a_0(x) = 0$. Ensuite pour $n \geq 2$,

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x)a_{n-k}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}.$$

Maintenant, pour $k \in [1, n-1]$, $k(n-k) = -k^2 + kn = -\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4} \leq \frac{n^2}{4}$ et donc

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n^2/4)^x} = \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}.$$

$$\forall x > 0, \forall n \geq 2, |c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}.$$

Si de plus $x \in]0, \frac{1}{2}]$, pour $n \geq 2$ on a

$$|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$$

$$\sim \frac{1}{n^{2x-1}}$$

car $2x-1 > 0$

Mais alors, $c_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la série numérique de terme général $c_n(x)$ est grossièrement divergente.

Si $0 < x \leq \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ est grossièrement divergente.

7. Cas où $x = 1$

(a) Soit $n \geq 2$. $\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \frac{n-X+X}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right)$. Puis

$$c_n(1) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{2(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{n}$$

$$\forall n \geq 2, c_n(1) = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{n}$$

(b) Soit $n \geq 2$.

$$\frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \left((n+1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n(n+1)} \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - 1 \right) \geq \frac{1}{n(n+1)} (1-1) = 0,$$

et donc

la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante.

(c) Pour $n \geq 2$, on a $H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{t} dt = 1 + \ln n$. Par suite, pour $n \geq 2$

$$|c_n(1)| \leq \frac{2(1 + \ln n)}{n}$$

On en déduit que la suite $|c_n(1)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En résumé, la suite $(c_n(1))_{n \geq 2}$ est de signe alterné et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant (d'après (b)). D'après le critère spécial aux séries alternées,

la série $\sum_{n \geq 2} c_n(1)$ converge.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1

8. Développement asymptotique en 1

(a) D'après la question 4.(b), F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. En particulier, F est dérivable en 1 et admet donc un développement limité d'ordre 1 en 1 :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} F(1) + F'(1)(x-1) + o(x-1) = \ln 2 + F'(1)(x-1) + o(x-1) \text{ (d'après 2.)}$$

On a aussi

$$1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-\ln 2(x-1)} = 1 - 1 + \ln 2(x-1) - \frac{\ln^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) = \ln 2(x-1) - \frac{\ln^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

(b) Mais alors quand x tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \frac{F(x)}{1-2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + F'(1)(x-1) + o(x-1)}{\ln 2(x-1) - \frac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)} = \frac{1}{x-1} \times \frac{1 + (F'(1)/\ln 2)(x-1) + o(x-1)}{1 - \frac{\ln 2}{2}(x-1) + o(x-1)} \\ &= \frac{1}{x-1} \left(1 + \frac{F'(1)}{\ln 2}(x-1) + o(x-1) \right) \left(1 + \frac{\ln 2}{2}(x-1) + o(x-1) \right) \\ &= \frac{1}{x-1} \left(1 + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) (x-1) + o(x-1) \right) \\ &= \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1).\end{aligned}$$

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1+}{\sim} \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1).}$$

9. Développement asymptotique en 1 (bis)

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, 2]$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ et donc $(n+1-n) \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq (n+1-n) \frac{1}{n^x}$ puis

$$0 \leq \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [1, 2], 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Soit $x \in [1, 2]$. La série de terme général $\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$ est de même nature que la suite de terme général $\frac{1}{n^x}$ (séries télescopiques) c'est-à-dire convergente. La question (a) permet alors d'affirmer que $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge.

$$\boxed{\forall x \in [1, 2], \sum_{n \geq 1} v_n(x) \text{ converge.}}$$

(c) Soit $x \in [1, 2]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x} dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} + \frac{1}{x-1} \left[\frac{1}{t^{x-1}} \right]_1^{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} + \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - 1 \right),$$

et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$.

$$\boxed{\forall x \in]1, 2[, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après (a), pour $x \in [1, 2]$, on a

$$\begin{aligned}0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) = \frac{1}{(n+1)^x} \text{ (série télescopique)} \\ &\leq \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

et donc $\sup \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k(x) \right|, x \in [1, 2] \right\} \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que la suite des restes de la série de fonctions de terme général v_n converge uniformément vers la fonction nulle sur $[1, 2]$ ou encore

la série de fonctions de terme général v_n , $n \geq 1$, converge uniformément sur $[1, 2]$.

(e) Montrons tout d'abord que chaque fonction v_n est continue sur $[1, 2]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [1, 2]$, on a

$$v_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{n^x} + \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}} \right) & \text{si } x \in]1, 2] \end{cases}$$

Déjà la fonction v_n est continue sur $]1, 2]$ et quand x tend vers 1,

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \frac{1}{n^x} + \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}} \right) = \frac{1}{n^x} + \frac{e^{-(x-1)\ln(n+1)} - e^{-(x-1)\ln(n)}}{x-1} \\ &= \frac{1}{n^x} + \frac{(1 - (x-1)\ln(n+1)) - (1 - (x-1)\ln(n)) + o(x-1)}{x-1} = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) + o(1) \\ &= v_n(1) + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, chaque v_n est continue sur $[1, 2]$ et puisque la série de fonctions de terme général v_n converge uniformément sur $[1, 2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est une fonction continue sur $[1, 2]$ et en particulier en 1.

On déduit alors de la question (c) que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \gamma,$$

et donc que

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. Application En comparant les développements obtenus en 8. et 9., on obtient $\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = \gamma$ et donc $F'(1) = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$. Mais on a vu que pour $x > 0$, $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n^x}$ et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = -F'(1) = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = \frac{\ln 2 (\ln 2 - 2\gamma)}{2}.$$