

PROBLÈME

Étude d'une équation aux dérivées partielles

Première partie : Quelques résultats préliminaires utiles

1.1 Noyau de DIRICHLET

1.1.1 $\forall \theta \in \mathbb{R}, -\theta \in \mathbb{R}$ et $D_n(-\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{ik(-\theta)} = \sum_{l=n}^{-n} e^{il\theta} = D_n(\theta)$. Donc D_n est 2π -périodique.

1.1.2 Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) d\theta = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi. \quad (3)$$

a

1.1.3 Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$ est la somme de $2n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$, le premier étant $e^{-in\theta}$. Ainsi :

$$\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = e^{-in\theta} \frac{1 - e^{i(2n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{-in\theta} \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}\theta} e^{-i\frac{2n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin((2n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^n 1 = 2n+1$.

1.2 Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

1.2.1 La fonction f étant continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc elle est bornée sur ce segment :

$$\exists M > 0 / \forall x \in [0, 2\pi], |f(x)| \leq M.$$

Si $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in [0, 2\pi]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $y = x + 2n\pi$ et donc $|f(y)| = |f(x + 2n\pi)| = |f(x)| \leq M$. Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Par CHASLES, on a :

$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} g(t) dt = \int_{\alpha-\pi}^{-\pi} g(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt + \int_{\pi}^{\alpha+\pi} g(t) dt.$$

D'autre part,

$$\int_{\alpha-\pi}^{-\pi} g(t) dt \stackrel{t=u-2\pi}{=} \int_{\alpha+\pi}^{\pi} g(u-2\pi) du = - \int_{\pi}^{\alpha+\pi} g(u) du.$$

D'où :

$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt. \quad (4)$$

1.3 Lemme de LEBESGUE

Montrons le résultat général suivant : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

La propriété est claire si $f = 1$, puisque :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} dt \right| = \left| \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} \right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$

Donc, par linéarité et la relation de CHASLES, la propriété est vraie pour toutes les fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Soit maintenant $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier sur $[a, b]$ tel que

$$\|f - \varphi\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\left| \int_a^b (f - \varphi)(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt \leq (b - a)\varepsilon,$$

d'autre part, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda_0$ on a :

$$\left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \varepsilon.$$

On obtient ainsi, $\forall \lambda \geq \lambda_0$,

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \left| \int_a^b (f(t) - \varphi(t)) e^{i\lambda t} dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq (1 + (b - a))\varepsilon$$

ce qui prouve que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

De même on a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{-i\lambda t} dt = 0$. Donc si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = 0.$$

$$\text{En particulier, } \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt = 0.$$

Deuxième partie

Convergence ponctuelle de la série de FOURIER d'un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $k \geq 2$

2.1 Quelques propriétés des coefficients de Fourier

2.1.1 Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, donc f est bornée par un certain $M > 0$, donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = M.$$

Donc la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2 Une intégration par parties fournit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-int}]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = inc_n(f). \quad (5)$$

2.1.3 On a, d'après la question précédente (5),

$$c_n(f'') = inc_n(f') = in(inc_n(f)) = -n^2 c_n(f). \quad (6)$$

iste φ en

2.2 Convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(f)$ pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

2.2.1 On a, d'après (6), $|c_n(f)| = \frac{1}{n^2} |c_n(f'')| \leq \frac{M}{n^2}$, où M est un majorant de $c_n(f'')$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ étant convergente, donc la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

2.2.2 $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|u_n(f)(x)| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$$

Le terme majorant (ne dépend pas x) définit une série numérique convergente, donc la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2.3 Convergence ponctuelle de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(f)$ pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: Théorème de DIRICHLET

2.3.1 On a

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n u_k(f)(x) = c_0(f)(x) + \sum_{k=1}^n c_k(f)e^{ikx} + c_{-k}(f)e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^n c_k(f)e^{ikx}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}e^{ikx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

2.3.2 Posons $u = x - t$, donc

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du$$

La dernière égalité découle de (4).

2.3.3 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t)dt$ d'après (3). D'où :

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))D_n(t)dt,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} dt$$

2.3.4 On a $S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t) \sin\left((2n+1)\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$. Il est clair que g_x est continue sur $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, comme rapport de deux fonctions continues, de plus

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} g_x(t) = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) - f(x)}{-t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = -2f'(x) = g_x(0).$$

D'où la continuité de g_x sur $[-\pi, \pi]$.

g_x est une fonction continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ (elle admet une limite en 0), le lemme de LEBESGUE indique que l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t) \sin \left((2n+1) \left(\frac{t}{2} \right) \right) dt$ a une limite nulle quand n tend vers l'infini. Autrement dit $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = f(x)$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela montre que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f .

2.4 On sait que la série de Fourier de f , $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(f)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (la question), donc uniformément et simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Posons $g = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(f)$. D'après le théorème de Dirichlet, g coïncide avec f en tout point x de $\mathbb{R}$. Ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(f)$ converge normalement $\mathbb{R}$ vers f .

Troisième partie

Application à l'étude d'une équation aux dérivées partielles

3.1 Une équation de sommabilité

3.1.1 Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwartz, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n, k \neq 0}^n k^2 |a_k| &= \sum_{k=-n, k \neq 0}^n k^3 |a_k| \frac{1}{k} \leq \left(\sum_{k=-n, k \neq 0}^n k^6 a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-n, k \neq 0}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=-n, k \neq 0}^n k^6 a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Le terme à droite admet une limite finie quand n tend vers l'infini, donc la famille $(n^2 a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité en question :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |a_k| \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^6 a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.1.2 D'après la condition nécessaire de convergence, $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} n^2 a_n = 0$, donc $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc par comparaison la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. D'autre part, en utilisant une autre fois l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient :

$$\sum_{k=-n}^n k |a_k| = \sum_{k=-n}^n (k \sqrt{|a_k|}) \sqrt{|a_k|} \leq \left(\sum_{k=-n}^n k^2 |a_k| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-n}^n |a_k| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le terme à droite admet une limite finie quand n tend vers l'infini, car les deux familles $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(n^2 a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont sommables, donc la famille $(n a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est aussi sommable.

3.2 Construction d'un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

3.2.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq |a_n| + |a_{-n}|$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (|a_n| + |a_{-n}|) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$ converge,

donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3.2.2 Les fonctions f_n sont 2π -périodiques et la convergence simple conserve la périodicité, donc f est 2π -périodique.

D'autre part les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et la convergence uniforme (la convergence normale entraîne la convergence uniforme) conserve la continuité, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3.2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on pose $f(x)e^{-inx} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ avec $u_k(x) =$

$$(a_k e^{ikx} + a_{-k} e^{-ikx}) e^{-inx}. \text{ On a,}$$

$$|u_k(x)| \leq |a_k| + |a_{-k}|.$$

Cette inégalité montre que la série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ converge uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$, d'où la possibilité d'intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k e^{ikx} + a_{-k} e^{-ikx}) e^{-inx} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k e^{i(k-n)x} + a_{-k} e^{-i(k+n)x}) dx \\ &= 2\pi a_n. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 2\pi a_n. \quad (7)$$

3.2.4 Les fonctions f_n sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_n''(x) = -n^2 f_n(x)$. Donc $|f_n''(x)| \leq n^2(|a_n| + |a_{-n}|)$, le terme majorant définit une série numérique convergente, car la famille $(n^2 a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n''$ converge normale-

ment et donc uniformément sur $\mathbb{R}$, par le théorème du cours, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n(x).$$

3.3 Existence d'une solution du problème

3.3.1 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|w_n(x, t)| = |f_n(x)| \leq |a_n| + |a_{-n}|$$

Donc, comme précédemment, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.2 Les fonctions w_n sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ converge uniformément sur

$\mathbb{R}^2$, donc la fonction somme w est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Les fonctions $x \mapsto w_n(x, t) = f_n(x)e^{-in^2t}$ sont 2π -périodiques car les f_n le sont, donc $x \mapsto w(x, t)$ est 2π -périodique car la convergence simple conserve la périodicité.

3.3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Les fonctions $t \mapsto w_n(x, t) = f_n(x)e^{-in^2t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les dérivées sont données par :

$$\frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) = -in^2 w_n(x, t)$$

De plus $\left| \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) \right| \leq n^2 |w_n(x, t)| \leq n^2 (|a_n| + |a_{-n}|)$, d'après l'hypothèse sur la famille

$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, \cdot)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Donc on peut conclure

que w admet une dérivée partielle par rapport à t , et que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = -i \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(x, t).$$

Les applications $(x, t) \mapsto \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) = -in^2 w_n(x, t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la série

$\sum_{n \in \mathbb{R}^2} \frac{\partial w_n}{\partial t}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$, donc $(x, t) \mapsto \frac{\partial w}{\partial t}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.4 Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Les fonctions $x \mapsto w_n(x, t) = f_n(x)e^{-in^2t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les dérivées sont données par :

$$\frac{\partial w_n}{\partial x}(x, t) = in(a_n e^{inx} - a_{-n} e^{-inx})e^{-in^2t}$$

De plus $\frac{\partial w_n}{\partial x}(x, t) \leq n(|a_n| + |a_{-n}|)$, d'après la question 3.1.2, la famille $(na_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, on en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial w_n}{\partial x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$. Donc on peut conclure que w admet une dérivée partielle par rapport à x , et que

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, t) = i \sum_{n=0}^{\infty} n(a_n e^{inx} - a_{-n} e^{-inx})e^{-in^2t}.$$

Les applications $(x, t) \mapsto \frac{\partial w_n}{\partial x}(x, t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial w_n}{\partial x}$ converge

normalement sur $\mathbb{R}^2$, donc $(x, t) \mapsto \frac{\partial w}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

De la même façon on montre que $x \mapsto \frac{\partial w}{\partial x}(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (a_n e^{inx} + a_{-n} e^{-inx})e^{-in^2t} = - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(x, t).$$

3.3.5 La fonction w vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto w(x, t)$ est 2π -périodique,
- les dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial w}{\partial t}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$,
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + i \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (a_n e^{inx} + a_{-n} e^{-inx}) e^{-in^2 t} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(x, t) + i \left(-i \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(x, t) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

- $w(x, 0) = f(x)$.

Donc w est bien solution du problème posé.

3.4 Unicité de la solution du problème

3.4.1 La fonction $(x, t) \mapsto v(x, t)e^{-inx}$ admet une dérivée partielle $(x, t) \mapsto \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)e^{-inx}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$ et donc bornée sur tout compact de la forme $[-\pi, \pi] \times [-\alpha, \alpha]$ ($\alpha > 0$), donc d'après le théorème de dérivation de fonctions définies par une intégrale, la fonction b_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) e^{-inx} dx \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) e^{-inx} dx \\ &= \frac{i}{2\pi} \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) e^{-inx} dx \\ &= -\frac{n}{2\pi} [v(x, t) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{in^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x, t) e^{-inx} dx = -\frac{in^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x, t) e^{-inx} dx \\ &= -in^2 b_n(t). \end{aligned}$$

Donc b_n vérifie l'équation différentielle $y' + in^2 y = 0$.

Par définition, on a :

$$b_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x, 0) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = a_n.$$

La dernière égalité est une conséquence de (7).

3.4.2 La solution de l'équation différentielle $y' + in^2 y = 0$ est de la forme $y(t) = \lambda e^{-in^2 t}$ comme b_n vérifie l'équation différentielle et $b_n(0) = a_n$, alors par unicité on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, b_n(t) = b_n(0) e^{-in^2 t} = a_n e^{-in^2 t}.$$

3.4.3 Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n(x, t) = a_n e^{-in^2 t} e^{inx} + a_{-n} e^{-in^2 t} e^{-inx} = (a_n e^{inx} + a_{-n} e^{-inx}) e^{-in^2 t}.$$

D'où :

$$|v_n(x, t)| \leq |a_n| + |a_{-n}|.$$

Cette inégalité montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto v(x, t)$ est un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc sa série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n(t)e^{inx} + b_{-n}(t)e^{-inx}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n(x, t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto v(x, t)$ (la question 2.4), d'où :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t).$$

Et comme $v_n(x, t) = (a_n e^{inx} + a_{-n} e^{-inx}) e^{-in^2 t} = f_n(x) e^{-in^2 t}$, alors

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) e^{-in^2 t} = w(x, t).$$

Ceci montre que le problème posé admet une solution unique.

[illegible]
$$f(t, x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = \frac{\partial L}{\partial x}$$

1940-1941

$$\int \frac{1}{\pi^2} = \Delta J, \quad \Delta(0, x) = \int \frac{1}{\pi^2} = (f)_{\Delta} d$$