

Suites de fonctions

Exercice 1

Etudier les convergences simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1) a) $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$

b) $f_n(x) = (\sin x)^n$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

c) $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2n^2(x - \frac{1}{n}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

d) $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$, $x \in [0, +\infty[$

2) Etudier la convergence simple de la suite de fonction suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0, n[\\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Exercice 2

On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers f .

3) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge t-elle uniformément sur $[-1, 1]$

Exercice 3

1) Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{2n+x} dx, \quad b_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} dx, \quad c_n = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^n dx.$$

Exercice 4 (d'après concours 2011)

1) Vérifier que pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} & \text{si } t \in [0, n[\\ 0 & \text{si } t \in [n, +\infty[\end{cases}$$

a) Vérifier que pour tout $u \in]-1, +\infty[$, $\log(1+u) \leq u$.

b) Montrer que $0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t} \forall t \in [0, +\infty[$

c) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

d) Dédire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

3) a) Montrer que

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

b) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Déduire de ce qui précède que $\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x)$.

5) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre $\Gamma_n(x+1)$ et $\Gamma_n(x)$ pour $x > 0$.

b) Déduire que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) Déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Soit $\alpha > 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(t) = \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}, t \in]0, +\infty[\text{ et } U_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que la suite $(U_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
4. a) Justifier $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(\alpha) > 0$.
b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{U_{n+1}(\alpha)}{U_n(\alpha)} = 1 - \frac{1}{n\alpha}$.
5. En déduire l'expression de $U_n(\alpha)$ en fonction de $U_1(\alpha)$.
6. On considère la suite $(W_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$W_n(\alpha) = \ln(U_n(\alpha)) + \frac{\ln n}{\alpha}.$$

a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (W_{n+1}(\alpha) - W_n(\alpha))$ est convergente.

b) En déduire qu'il existe un réel $K(\alpha) > 0$ tel que $U_n(\alpha) \sim \frac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Exercice 6 "D'après Mp 2019 "

1. a) Montrer $\forall m \in \mathbb{N}, t \mapsto t^m e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On note } I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt.$$

b) Montrer que $I_{2m+1} = 0$ et $I_{2m} = \frac{\sqrt{\pi}(2m)!}{m!4^m}$.

$$(\text{On admet que } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}).$$

2. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{2m}(1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n > m$.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. En étudiant les variations de la fonction $g_t : x \mapsto g_t(x) = -x \ln(1 + \frac{t^2}{x})$ sur $[1 + \infty[$, montrer qu la suite $((1 + \frac{t^2}{n})^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montre que $\lim_{n \leftarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m}(1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = \frac{\sqrt{\pi}(2m)!}{m!4^m}$.

Problème "Théorème de Weirstrass et applications".

Partie I Cette partie a pour objectif de démontrer le Théorème de Weirstrass.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour n un entier supérieur ou égale à 2, on définit le n^{ime} polynôme de Berenstein associé à f par :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k f(\frac{k}{n}) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1. Déterminer le polynôme $B_n(f)$ dans chacun des cas suivants :
 $f(x) = 1$, $f(x) = 1 - x$ et $f(x) = x(1 - x)$, $\forall x \in [0, 1]$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^n C_n^k (k - nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.
3. a) Justifier que pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x, y \in [0, 1]$ avec $|x - y| \leq \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

4. En considérant les ensembles suivants :

$$A = \{k \in \{0, \dots, n\}; |x - \frac{k}{n}| \leq \alpha\}$$

$$\text{et } B = \{k \in \{0, \dots, n\}; |x - \frac{k}{n}| > \alpha\} \text{ avec } x \in [0, 1],$$

montrer que la suite $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

5. Dédire le théorème de Weirstrass :

Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow IK$ continues, il une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Partie II Le but de cette partie est donner des applications du Théorème de Weirstrass.

Application 1 .

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Application 2 "D'après MP2017".

Soit $E = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow IK \text{ continues muni de la norme de convergence uniforme } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \text{ et on considère } \mathcal{P} \text{ l'espace des fonctions}$

polynômiales de $[a, b] \rightarrow IK$.

1) Montrer que $d(f, \mathcal{P}) = 0, \forall f \in E$.

2) On pose Pour $u \in E$, on pose $\mathcal{D}(u) = \{f \in \mathcal{P} \text{ tel que } d(f, \mathcal{P}) = \|u - f\|\}$.

Montrer que $\mathcal{D}(u) = \{u\}$ si $u \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}(u) = \emptyset$ si $u \notin \mathcal{P}$.

Application 3 "D'après MP2023"

On pose $\mathcal{C}[0, 1] = \{f : \text{continues sur } [0, 1]\}$ qu'on muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ pour tout $f \in \mathcal{C}[0, 1]$.

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+) = \{f : \text{continues et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$ muni de la norme de convergence uniforme $N_\infty(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x)|$, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$.

Soit $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{C}[0, 1]; g(0) = 0\}$ et on désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynômiales.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un hyperplan fermé de $\mathcal{C}[0, 1]$.

On note $\mathcal{P}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \{f \in \mathcal{P}; f(0) = 0\}$ et on fixe $g \in \mathcal{F}$.

2. a) Justifier qu'il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g sur $[0, 1]$.

b) En déduire que la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $Q_n = P_n - P_n(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers g sur $[0, 1]$ et que $\overline{\mathcal{P}_0} = \mathcal{F}$.

Soit $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ et on note $g(t) = h(-\ln t)$, $t \in]0, 1]$.

3. Justifier que g se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$ notée encore par g et qui appartient à $\mathcal{F}$. Comparer $N_\infty(h)$ et $\|g\|_\infty$.

4. En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $e^{-x}(P_n(e^{-x}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}^+$.