

Série II" Suite de fonctions"

Exercice 1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x).$$

Étudier de la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \arctan(nx).$$

- 1 Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
- 2 La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?
- 3 Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0, a]$.
- 4 Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \inf \left(n, \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \text{ et } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f .
2. Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

3. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $]0, +\infty[$?

Exercice 4 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

- 1 Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
- 2 Que peut-on en déduire de $P_n - P_N$ pour tout $n \geq N$?
- 3 Montrer que f est nécessairement polynomiale.
- 4 Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- f est continue sur $[a, b]$,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante sur $[a, b]$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

1. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, $|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
2. Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas α (i.e. $\max_{0 \leq k \leq p-1} |a_{k+1} - a_k| = \alpha$). Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, et pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
3. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 6 Soient a et b des réels tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On se propose de montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n(f) = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt.$$

1. Vérifier que si f est une fonction constante, alors la suite $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si f est en escalier sur $[a, b]$, alors la suite $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. En utilisant un résultat d'approximation à préciser, montrer que la suite $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 7 1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_a^b f(t) dt = 0.$$

i) Soit $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales telle que $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. On considère $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite polynômes telles que :

$$P_n(x) = Q_n(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b Q_n(t) dt.$$

Vérifier que $\int_a^b P_n(t) dt = 0$ et que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

2. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions polynômiales telle que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $[a, b]$ et $(P'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g' sur $[a, b]$.