

Série I "Séries de Fonctions"

Exercice 1 .

On considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et décroissante.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = a_n x^n (1 - x)$

1. Montre que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ la convergence uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 2 .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ convergence uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 3 .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.
2. Montrer que f est continue sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
3. A l'aide d'encadrement par des intégrales, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{\pi}{2}.$$

4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur les segments $]0, \alpha]$.

Exercice 4 .

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, \infty[$ et exprimer f' à l'aide de fonctions usuelles.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Déduire l'expression de f sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5 .

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Vérifier que la série $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On posera

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x).$$

2. a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente.

b) Etudier la convergence normale de $\sum_{n \geq 2} f_n$ sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

$a > 0$.

3. a) Vérifier que $\forall x \geq 0, e^x \geq x + 1$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|R_n(x)| \leq \frac{x}{e^x - 1} \frac{1}{n + 1}$.

4. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

5. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

6. Soit $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$.

a) Vérifier que g est décroissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

c) Dédire que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6 .

Soit (a_n) une suite de nombres complexes et $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs strictement croissante et non majoré. On pose

$$D_a = \{x \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ est abs cv}\}$$

On suppose que $D_a \neq \emptyset$ et que D_a est minoré. On pose $\sigma_a = \inf D_a$

1. Montrer que $\forall x > \sigma_a$, la série $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$ est absolument convergente.

Pour $\forall x > \sigma_a$, on pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$.

2. Montrer que g est continue sur $] \sigma_a, +\infty[$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > \sigma_a$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ est absolument convergente.

4. Soit $x_0 > \sigma_a$ et $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

a) Justifier que la fonction $(r, \theta) \mapsto f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n(x_0 + re^{i\theta})}$ est

bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\beta, \beta[$.

b) Soit $\theta \in]-\beta, \beta[$, montrer que l'application $r \mapsto f(r, \theta)$ est C^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Soit $r \in]0, +\infty[$, montrer que l'application $\theta \mapsto f(r, \theta)$ est C^1 sur $[-\beta, \beta]$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) - ir \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = 0$$