

Séries de fonctions

Exercice 1 .

1) Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

2) Soit $g_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

Montrer que g est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 .

1) Vérifier que $\forall x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+x)}$ converge. On pose

$$u(x) = (x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)}, \quad \forall x > 0.$$

2) a) Vérifier que $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$

b) Montrer que la fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, u'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

3) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xu(x) = -1$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$

(Ind : utiliser la monotonie de u et que $u(x) \geq \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$

pour $x > 1$).

4) Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge. On notera γ sa somme.

5) Montrer que $\int_1^x u(t) dt = \gamma$

6) Montrer que $\forall x > 0$, $u(x+1) = u(x) + \frac{1}{x}$

7) Soit $h(x) = \int_x^{x+1} u(t) dt$

En calculant $h'(x)$, montrer que $h(x) = \log(x) + \gamma$.

8) Déduire la valeur de $\int_1^3 u(x) dx$.

Exercice 3 "Etude de la fonction ζ de Riemann"

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

1. Justifier que les domaines de définitions de ζ et μ sont : $D_\zeta =]1, +\infty[$ et $D_\mu =]0, +\infty[$.

2. Montrer que les fonctions ζ et μ sont continues sur leurs domaines de définitions.

3. Montrer que ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

4. a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$.

(On pourra remarquer que $\zeta(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}, \forall N \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x > 1$).

5. a) Montrer ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^k, \forall k \in \mathbb{N}$

b) Dédire que ζ est convexe.

6. a) Montrer que $\forall x > 1, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$

(Ind : On peut utiliser une comparaison avec une intégrale).

b) Dédire que de $\zeta \sim_{1+} \frac{1}{x-1}$.

7. a) Montrer que $\forall x > 1, \mu(x) = \zeta(x)(2^{1-x} - 1)$.

b) Dédire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x)$.

Exercice 4 On désigne par :

$\mathcal{B} = \{f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f \text{ est continue et bornée}\}$
et

$\mathcal{E} = \{f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f \text{ est continue et } \int_0^t \frac{f(t)}{1+t^2} dt \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[\}$.

1) Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$

2) Vérifier que l'application $g : t \rightarrow \sqrt{t} \sin t$ est un élément de $\mathcal{E}$ mais n'appartient pas à $\mathcal{B}$.

3) Soit $x > -1$, montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$ la fonction $t \rightarrow$

$\frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose

$$\forall x > -1, F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2+x} dt.$$

4) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$ avec $a_n =$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

Exercice 5.

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Justifier que le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty[$.

2. Pour $x > 1$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$

Montrer que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.

3. Soit $x > 1$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $\int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} dt$ est convergente, puis exprimer sa valeur à l'aide de la fonction de Γ ($\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$).

b) Montrer que pour tout $x > 1, F(x) = \Gamma(x)\zeta(x)$.

4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

5. Montrer que :

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{e^{u^2} - 1} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad b) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\log(1+u)}{u} \right)^2 du = 2\zeta(2)$$

(On rappelle que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

6. Montrer que

$$\zeta(x) - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{2^x}.$$

7. Dédire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t - 1)} dt \sim_{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{2^x}$$

Exercice 6.

Soit $x > 0$, on pose $f(t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} \forall t > 0$.

1) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que $\forall t > 0, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ avec $f_n(t) = (-1)^n \frac{e^{-(n+x)t}}{\sqrt{t}}$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4) Soit $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t), \forall t > 0$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, R_n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} R_n(t) dt = 0.$$

5) Dédurre que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}.$$

Exercice 7 .

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des somme partielles, montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Problème

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

pour tout $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_k(x) = f(x+k) \int_{k+x}^{x+k+1} f(t) dt.$$

1) a) Montrer que

$$0 \leq u_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1).$$

b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction notée U .

2) Après avoir justifié l'existence de U , déterminer son expression dans chacun des cas suivants :

i) $f(x) = e^{-x}$.

ii) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

3) On note pour tout $n \in \mathbb{N}, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

Montrer que $0 \leq R_n(x) \leq f(x+n+1), \forall x > 0$.

4) a) Montrer que la fonction U est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x)$.

5) On suppose de plus dans cette question que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

a) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, montrer $\forall x > 0, \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \varepsilon f(x) + f(x+\varepsilon)$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^{x+1} f(t) dt}{f(x)} = 0$.

6) Soit $v_k(x) = \frac{u_k(x)}{f(x)}$.

a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge uniformément sur $]0, 1[$.

b) Dédurre que $U \sim_{0^+} f$.