

Exercice 1

a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = x^n (1-x)^n, x \in [0,1]$
 Si $x \in]0,1[\Rightarrow x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 et $(1-x)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Si $x=0$ ou $x=1 \Rightarrow f_n(x)=0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 Ainsi $f_n \xrightarrow{CS} 0$ sur $[0,1]$.

b) C.U

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = ?$$

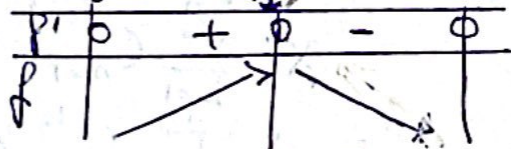
$$|f_n(x) - 0| = f_n(x)$$

f_n est dérivable sur $[0,1]$.

$$\forall x \in [0,1]; f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x)^n - nx^n(1-x)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=\frac{1}{2}$$



Suites de fonctions

D'après le tableau de variation de f .
 $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n (\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

D'où $f_n \xrightarrow{CS} 0$ sur $[0,1]$.

b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = (\sin x)^n, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow 0 \leq \sin x < 1$

$$\Rightarrow (\sin x)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Si $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_n(\frac{\pi}{2}) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

D'où $f_n \xrightarrow{CS} f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

C.U • On a $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[0,1]$ et $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur $[0,1]$.

Or f n'est pas continue, d'où $f_n \not\xrightarrow{CS} f$ sur $[0,1]$.

c) soit $x \in]0, +\infty[$.

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tg $\forall n \geq n_0, \frac{1}{n} < x$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

• Si $x=0 \Rightarrow f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ainsi $f_n \xrightarrow{CS} 0$ sur $[0, +\infty[$

C.S $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}; x \in [0, +\infty[$
 si $x \in [0, 1[$, alors $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

• si $x \in]1, +\infty[$

$f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

• si $x = 1$; $f_n(1) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{C.S} f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

C.U

• $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ continue sur $[0, +\infty[$

• $f_n \xrightarrow{C.S} f$ sur $[0, +\infty[$

or f n'est pas continue sur $[0, +\infty[$

Alors $f_n \xrightarrow{C.U} \neq f$ sur $[0, +\infty[$

* sur $[0, 1[$

• $f_n \xrightarrow{C.S} \tilde{f} = 0$ sur $[0, 1[$

• $\exists x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1[$

$f_n(x_n) = \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{1 + (1 - \frac{1}{n})^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1}}{1 + e^{-1}}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{C.U} \neq \tilde{f}$ sur $[0, 1[$

Exercice 2

$\forall f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pose.

$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$

1) a) si $f(x) = 1$

$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n$

$\Rightarrow B_n(f) = 1 = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

• si $f(x) = x$

$\Rightarrow B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$

$= x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$

$= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x \right|$$

a. Si: $f(x) = x(x-1)$

$$B_f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) x^k (1-x)^{n-k}$$

or $C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) = -\frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k}{n^2} (n-k)$

$$= -\frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}$$

$$= -\frac{(n-1)}{n} C_{n-2}^{k-1}$$

Si $n \geq 2$

$$\Rightarrow B_f(x) = -\frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= -\frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^{k+1} (1-x)^{n-1-k}$$

$$= -\frac{(n-1)}{n} x (1-x) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k}$$

$$B_n(f) = -\frac{(n-1)}{n} x (1-x) \left\{ \Rightarrow \right.$$

$n=1; B_1(f) = 0$

$$\forall n \geq 1, B_n(f)(x) = -\frac{(n-1)}{n} x(1-x)$$

b) $\sum_{k=0}^n C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k (k^2 - 2nkx + n^2 x^2) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^n C_n^k k x^{k-1} (1-x)^{n-k} + n^2 x^2 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k (k(k-1) + nk) x^k (1-x)^{n-k} - 2n^2 x \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + n^2 x^2$$

$$= n^2 \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) x^k (1-x)^{n-k} + n^2 \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$- 2n^2 x \cdot x + n^2 x^2$$

$$= n^2 \cdot \left(-\frac{(n-1)}{n} x(1-x) \right) + n^2 x - n^2 x^2$$

$$= -n(n-1) x(1-x) + n^2 x(1-x)$$

$$= nx(1-x)$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in [0, 1]$

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| \sum_{k=0}^n C_n^k f(x) x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k \in A} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in B} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{k \in A} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in B} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \varepsilon \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}_{=1} \\ &\quad + \sum_{k \in B} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, alors f est bornée. $\Rightarrow \exists M \geq 0$ tq $|f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$
 $\Rightarrow |f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq 2M.$

D'autre part on a si $k \notin B$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \frac{\alpha}{n}$$

$$\Rightarrow |nx - k| \geq \alpha \Rightarrow (nx - k)^2 \geq \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{(nx - k)^2}{\alpha^2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in B} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2M \sum_{k \in B} C_n^k \frac{(nx - k)^2}{\alpha^2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^n C_n^k (nx - k)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2M}{\alpha^2} \cdot nx(1-x) \\ &\leq \frac{2M}{\alpha^2 n}, \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\alpha^2 n}, \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\alpha^2 n}$$

$$\text{or } \frac{2M}{\alpha^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0$$

$$\frac{2M}{\alpha^2 n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0$$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f)(x)| < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow B_n f \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(U)} f$$

2) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue.

On pose $g(x) = f(a + (b-a)x)$
 $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (b-a)x \leq b-a$
 $\Leftrightarrow a \leq a + (b-a)x \leq b$

g est continue sur $[0, 1]$.
 Alors d'après 1), il existe (P_n)
 une suite de polynômes tq.

$$P_n \xrightarrow{CU} g \text{ sur } [0, 1]$$

On pose $Q_n(x) = P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, $a \leq x \leq b$

$$\sup_{a \leq x \leq b} |Q_n(x) - f(x)| = \sup_{a \leq x \leq b} \left| P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right|$$

$$= \sup_{0 \leq y \leq 1} |P_n(y) - g(y)|$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow Q_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [a, b].$$

4) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$

$$\Rightarrow \forall P \in \mathbb{K}[x]; \int_a^b P(t) f(t) dt = 0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\int_a^b t^k f(t) dt}_0 = 0$$

f est continue sur $[a, b]$
 $\Rightarrow \bar{f}$ " " " "

Th $\Rightarrow \exists (P_n)$ suite de fonctions poly. tq
 $P_n \xrightarrow{CU} \bar{f}$ sur $[a, b]$
 Weierstrass

Comme f est continue sur $[a, b]$, alors elle est bornée et positive

$$f \cdot P_n \xrightarrow{CU} f \cdot \bar{f} = |f|^2 \text{ sur } [a, b]$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) P_n(t) dt = \int_a^b |f|^2 dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$$

Comme $|f|^2$ est continue et positive, alors

$$|f|^2(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

Exercice 4

$$f(t) = e^{-t} t^d (L_n t)^q, \quad d > -1 \text{ et } q \in \mathbb{N}$$

4) f est continue sur $]0, +\infty[$

$$t^2 |f(t)| = e^{-t} t^{d+2} (L_n t)^q \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow |f(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive et intégrable au $v(+\infty)$, alors

Application 2:

1) $d(f, P) = \inf \{ \|f - p\|_\infty; p \in P \} \geq 0$
 Puisque f est continue, alors d'après le th.
 de Weierstrass, il existe $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite
 d'éléments de P tq $p_n \xrightarrow{C} f$ sur $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \|f - p_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \inf \{ \|f - p\|_\infty; p \in P \} = 0$$

$$\Leftrightarrow d(f, P) = 0, \forall f \in E.$$

2) $D(U) = \{ f \in E; d(f, P) = \|U - f\|_\infty \}$

* si $U \in P \Leftrightarrow U$ fonction polynomiale

$$\Rightarrow d(U, P) = \|U - U\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow U \in D(U) \Rightarrow \{U\} \subset D(U)$$

soit $f \in D(U) \Rightarrow d(f, P) = \|U - f\|_\infty$

$$\Leftrightarrow \dots$$

d'après 1) $d(f, P) = 0 \Leftrightarrow \|U - f\|_\infty = 0$
 $\Leftrightarrow U = f$

Alors $D(U) = \{U\}$ si $U \in P$
 $D(U) = \emptyset$ si $U \notin P$

Application 2

$$1) F = \{ g \in C([0, 1], \mathbb{R}); g(0) = 0 \}$$

$$= \ker \varphi \text{ avec}$$

$$\varphi: C([0, 1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g \mapsto \varphi(g) = g(0)$$

φ est linéaire (forme)

$\forall g \in C([0, 1], \|\cdot\|_\infty):$

$$|\varphi(g)| = |g(0)| \leq \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est continue.}$$

$F = \ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé
 puisque $\{0\}$ est un fermé

$\varphi \neq 0$. car $\varphi(1) = 1 \neq 0$
 $\Rightarrow 1$ est un hyperplan.

2) a) $P_0 = F \cap P = \{ p \in P \text{ tq } p(0) = 0 \}$
 $g \in F \Rightarrow g$ est continue. d'après le
 th de Weierstrass il existe (p_n)
 suite de fonctions polynomiales tq.

$$p_n \xrightarrow{C} g \text{ sur } [a, b].$$

b) soit $Q_n(x) = p_n(x) - p_n(0)$

$$Q_n(0) = 0 \Rightarrow (Q_n) \text{ est une suite}$$



d'éléments de P_0 .

$$\|Q_n - g\|_\infty = \|P_n - P_n(0) - g\|_\infty \leq \|P_n - g\|_\infty + |P_n(0)|$$

D'autre part on a $|P_n(0) - g(0)| \leq \|P_n - g\|_\infty$

$$\Rightarrow |P_n(0)| \leq \|P_n - g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|Q_n - g\|_\infty \leq 2 \cdot \|P_n - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow Q_n \xrightarrow{CU} g \text{ sur } [0, 1]$$

$$\bullet \text{ On a } P_0 \subset F \Rightarrow \overline{P_0} \subset \overline{F} = F \text{ (car } F \text{ fermé)}$$

D'autre part $\forall g \in F, \exists Q_n \in P_0$ tq.

$$Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \Rightarrow g \in \overline{P_0} \Rightarrow \underline{F \subset \overline{P_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{F = \overline{P_0}}$$

3) Soit $h \in C_0(\mathbb{R}^+)$, on pose $g(t) = h(-\ln t)$ $t \in]0, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln t) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$$

$\Rightarrow g$ est prolongeable par continuité en 0. le prolongement qui sera noté g vérifie

$$g(0) = 0 \Rightarrow g \in \mathcal{R}$$

$$|g(t)| = |h(-\ln t)|; t \in]0, 1]$$

$$= \sup_{x \in [0, +\infty[} |h(x)| = N_\infty(h)$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [0, +\infty[} |g(t)| = N_\infty(h) \quad \text{car } t \mapsto -\ln t \text{ est bijective de }]0, 1] \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \|g\|_\infty = N_\infty(h)$$

4) g continue sur $[0, 1]$.

$\Rightarrow \exists (P_n)$ suite de fonction polynomiale

$$\text{tq } P_n \xrightarrow{CU} g \text{ sur } [0, 1]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+; \exists t \in]0, 1] \text{ tq } x = -\ln t \Leftrightarrow e^{-x} = t$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+;$$

$$|e^{-x} P_n(e^{-x}) - h(x)| = |t P_n(t) - h(-\ln t)| = |t P_n(t) - g(t)|$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |e^{-x} P_n(e^{-x}) - h(x)| = \sup_{t \in [0, 1]} |t P_n(t) - g(t)|$$

$$\text{On considère } t P_n(t) = Q_n(t) \text{ car } Q_n(0) = 0$$

$$\Rightarrow N_\infty(e^{-x} P_n(e^{-x}) - h) = \|Q_n - g\|_\infty \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow x \mapsto e^{-x} P_n(e^{-x}) \xrightarrow{CU} g \text{ sur } \mathbb{R}^+$$