

Corrigé de l'exercice N° 1.

► Convergence simple :

Soit $x \in [0, +\infty[$

- Si $x = 0$, pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ converge.
- Si $x > 0$, $f_n(x) = n^\alpha x^n e^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

► Convergence uniforme :

Nous allons étudier la **convergence normale** sur $[0, 1]$, pour cela calculons

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty[} n^\alpha x^n e^{-nx}$$

Pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $\varphi_n(x) = n^\alpha x^n e^{-nx}$.

On a φ_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\varphi_n'(x) = n^\alpha (nx^{n-1}e^{-nx} - nx^n e^{-nx}) = n^{\alpha+1} x^{n-1} e^{-nx} (1 - x)$$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi_n'(x)$	+	0	-
$\varphi_n(x)$	0	$\varphi_n(1)$	0

D'après le tableau de variations, on déduit que:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} \varphi_n(x) = \varphi_n(1) = n^\alpha e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Alors $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge, d'où $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, par suite elle converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice N° 2.

① Soit $x \in [0, 1]$ fixé. $\forall n \geq 1, 0 \leq f_n(x) \leq \alpha_0(1-x)x^n$.

Comme $|x| < 1$, alors la série géométrique $\sum_{n \geq 1} x^n$ converge, par suite $\sum_{n \geq 1} \alpha_0(1-x)x^n$ converge.

Par le critère de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

② On a $\forall n \geq 1, \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x)$. (car $f_n \geq 0$).

La fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$

$$f'_n(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$$

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$f'_n(x)$		+	0
$f_n(x)$	0	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	0

D'après le tableau de variations, on en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

Comme $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(\frac{n}{n+1})} = e^{-n \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Alors $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e}$ et $\frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Par suite $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e} \frac{\alpha_n}{n}$.

En appliquant le critère d'équivalence, on déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} f_n \text{ converge normalement sur } [0, 1] &\iff \sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty \text{ converge} \\ &\iff \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge} \end{aligned}$$

③ $\Leftarrow$ Supposons que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Comme la suite (α_n) décroissante et positive, alors pour tout $k \geq n+1$, $0 \leq \alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_{n+1} x^k (1-x) \\ &\leq \alpha_{n+1} (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1} (1-x) \cdot \frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1} x^{n+1} \leq \alpha_{n+1} \end{aligned}$$

Comme α_{n+1} ne dépend pas de x et converge vers 0, alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

$\Rightarrow$ Supposons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

La suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite ℓ et pour tout n , $0 \leq \ell \leq \alpha_n$.

Par suite, pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \geq \ell (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \ell x^{n+1}$.

D'où, $\sup_{x \in I} |R_n(x)| \geq R_n(1) \geq \ell > 0$, comme $\sup_{x \in I} |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\ell = 0$.

Corrigé de l'exercice № 3.

① Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. $\left| (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} \right| = \frac{x^2 + n}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et à termes positifs, par le critère d'équivalence, $\sum_{n \geq 1} \left| (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} \right|$ diverge.

Par suite la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ ne converge absolument en aucune valeur de $\mathbb{R}$.

② Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, la suite $\left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)_{n \geq 1} = \left(x^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0.

D'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n \geq 1} \frac{x^2 + n}{n^2}$ converge, et, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$,

on a : $x^2 \leq \gamma = \max(\alpha^2, \beta^2)$, d'où

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2 + (n+1)}{(n+1)^2} \leq \frac{\gamma + (n+1)}{(n+1)^2} = \alpha_n$$

Comme $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ ne dépend pas de x et converge vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

③ Pour tout $n \geq 1$, $f_n(n) = \frac{n^2 + n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Donc la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle,

Par suite la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice № 4.

① Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

► Si $x = 0$, pour tout $n \geq 0$, $f_n(0) = 0$, alors $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ converge.

► Si $x \neq 0$, on a $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2 x^2} = \left(\frac{1}{x} \right) \frac{1}{n^2}$ de signe constant.

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par la règle d'équivalence $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

On en déduit alors que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

② (a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $]0, +\infty[$.

Pour tout $n \geq 0$ et $x \in [\alpha, \beta]$

$$|f_n(x)| = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{\beta}{1 + n^2 \alpha^2} \leq \left(\frac{\beta}{\alpha^2} \right) \cdot \frac{1}{n^2} = \beta_n$$

Comme $(\beta_n)_{n \geq 0}$ ne dépend pas de x et $\sum_{n \geq 0} \beta_n$ converge.

Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$.

(b) **Montrons que f est continue sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.**

Montrons tout d'abord que f est continue sur $]0, +\infty[$.

► Pour tout $n \geq 0$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$.

► $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$:

D'après la question précédente, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$, alors elle converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de continuité f est continue sur $]0, +\infty[$.

Comme f est impaire, alors f est continue sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

(c) Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n)$$

Avec $\forall t \in [0, +\infty[$, $g(t) = \frac{x}{1+t^2x^2}$, on a g est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n \leq t \leq n+1 &\implies g(n+1) \leq g(t) \leq g(n) \\ &\implies \int_n^{n+1} g(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq \int_n^{n+1} g(n)dt \\ &\implies g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n) \\ &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} g(n+1) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} g(t)dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) \\ &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} g(n) \leq \int_0^{+\infty} g(t)dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) \\ &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) - g(0) \leq \int_0^{+\infty} g(t)dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) \\ &\implies f(x) - x \leq [\arctan(tx)]_{t=0}^{+\infty} \leq f(x) \\ &\implies f(x) - x \leq \frac{\pi}{2} \leq f(x) \\ &\implies \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = f(0)$, en particulier f n'est pas continue en 0.

③ Comme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0$$

D'après le théorème de double limite, $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur tout voisinage de 0^+ , en particulier elle ne converge pas uniformément sur les segments $]0, \alpha[$.

① Convergence simple :

- Si $x \geq 0$, la suite $\left(\frac{e^{-nx}}{n}\right)_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0.

D'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ converge.

De plus

$$\forall x \geq 0, \forall n \geq 1, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k} \right| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \right| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$$

- Si $x < 0$, alors $\left| (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} \right| = \frac{e^{-nx}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc $(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ est divergente.

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

- ② Pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

(a) Montrons que f est continue sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
 ► Montrons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

D'après la question ①, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Or $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de x et converge vers 0, alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de continuité, f est continue sur $[0, +\infty[$

(b) Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimons f' à l'aide de fonctions usuelles.

- Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$

- Montrons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

]D'après la question ①, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

- Montrons que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $[0, +\infty[$.

Soit $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$.

Pour tout $n \geq 1$.

$$\|f'_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f'_n(x)| = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} e^{-nx} = e^{-n\alpha} = (e^{-\alpha})^n$$

Comme $\alpha > 0$, alors $0 < e^{-\alpha} < 1$, donc la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty}$ converge, ainsi $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\alpha, \beta]$.

D'après le théorème de dérivation, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = - \sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-x})^n = - \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

(c) **Déterminons la limite de f en $+\infty$.**

► Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

► D'après la question ②, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de double limite, f admet une limite finie en $+\infty$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

(d) **Exprimons f à l'aide des fonctions usuelles.**

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Donc f est une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{(1 + e^{-x})'}{1 + e^{-x}}$.

Alors $f(x) = -\ln(1 + e^{-x}) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors $c = 0$.

Par suite $\forall x > 0$, $f(x) = -\ln(1 + e^{-x})$.

Par la continuité de f sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $\forall x \geq 0$, $f(x) = -\ln(1 + e^{-x})$.

En particulier $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Corrigé de l'exercice N° 6.

① Montrons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$.

Soit $x \in] -1, 1[$, pour tout $n \geq 1$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^n \sin(nx)}{n} \right| = \frac{|x|^n |\sin(nx)|}{n} \leq |x|^n$$

Comme $|x| < 1$, alors la série géométrique $\sum_{n \geq 1} |x|^n$ converge, par la règle de comparaison,

$\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge absolument, par suite elle est convergente.

On en déduit $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$.

② Montrons que f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$

► Pour tout $n \geq 1$, f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$

$$f'_n(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)$$

► D'après la question précédente $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$.

► $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $] -1, 1[$:

Soit $[\alpha, \beta] \subset] -1, 1[$, posons $\gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$.

Pour tout $n \geq 1$ et $x \in [\alpha, \beta]$:

$$|f'_n(x)| = |x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)| \leq |x|^{n-1} + |x|^n \leq 2|x|^{n-1} \leq 2\gamma^{n-1}$$

puisque $(2\gamma^{n-1})_{n \geq 1}$ ne dépend pas de x et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \gamma^{n-1}$ converge, car

$0 \leq \gamma \leq 1$, alors $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\alpha, \beta]$.

D'après le théorème de dérivation, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx))$$

Exprimons f' à l'aide des fonctions usuelles

► Si $x = 0$, $f'(0) = 0$.

► Si $x \in] -1, 1[$ **non nul**,

Remarquons que $x^{n-1} \sin(nx) = \text{Im}(x^{n-1} e^{inx})$ et $x^n \cos(nx) = \text{Re}(x^n e^{inx})$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Im}(x^{n-1} e^{inx}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Re}(x^n e^{inx}) \\ &= \text{Im} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx} \right) + \text{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{ix})^n \right) + \text{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{ix})^n \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x e^{ix}}{1 - x e^{ix}} \right) + \text{Re} \left(\frac{x e^{ix}}{1 - x e^{ix}} \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{e^{ix}}{1 - x e^{ix}} \right) + x \text{Re} \left(\frac{e^{ix}}{1 - x e^{ix}} \right) \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix}}{1 - x e^{ix}} &= \frac{e^{ix}}{(1 - x \cos(x)) - ix \sin(x)} = \frac{(1 - x \cos(x)) + ix \sin(x)}{\sqrt{(1 - x \cos(x))^2 + (x \sin(x))^2}} e^{ix} \\ &= \left(\frac{(1 - x \cos(x)) \cos(x) + x \sin^2(x)}{\sqrt{(1 - x \cos(x))^2 + (x \sin(x))^2}} \right) + i \left(\frac{(1 - x \cos(x)) \sin(x) + x \sin(x) \cos(x)}{\sqrt{(1 - x \cos(x))^2 + (x \sin(x))^2}} \right) \\ &= \left(\frac{(1 - x \cos(x)) \cos(x) + x \sin^2(x)}{\sqrt{1 - 2x \cos(x) + x^2}} \right) + i \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - 2x \cos(x) + x^2}} \right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right) + x \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right) \\ &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - 2x \cos(x) + x^2}} + x \frac{(1 - x \cos(x)) \cos(x) + x \sin^2(x)}{\sqrt{1 - 2x \cos(x) + x^2}} \\ &= \frac{\sin(x) + x \cos(x) - x^2 \cos^2(x) + x^2 \sin^2(x)}{\sqrt{1 - 2x \cos(x) + x^2}} \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \frac{\sin(x) + x \cos(x) - x^2 \cos^2(x) + x^2 \sin^2(x)}{\sqrt{1 - 2x \cos(x) + x^2}}$

Corrigé de l'exercice N° 7.

① Convergence simple :

► Si $x > 0$, alors $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

► Si $x \leq 0$, alors $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Donc $f_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par suite $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

On en déduit que $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

② Montrons que f est continue sur $]0, +\infty[$.

► Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$.

► $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$:

Soit $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |e^{-x\sqrt{n}}| = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} e^{-x\sqrt{n}} = e^{-\alpha\sqrt{n}} = f_n(\alpha)$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty = \sum_{n \geq 1} f_n(\alpha)$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\alpha, \beta]$.

D'après le théorème de continuité, on en déduit que f est continue sur $]0, +\infty[$.

③ Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

► Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

► $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$:

Montrons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$ (c'est un voisinage de $+\infty$).

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [1, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in [1, +\infty[} |e^{-x\sqrt{n}}| = \sup_{x \in [1, +\infty[} e^{-x\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{n}} = f_n(1)$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty = \sum_{n \geq 1} f_n(1)$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[1, +\infty[$.

D'après le théorème de double limite f admet une limite finie en $+\infty$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

④ **Montrons que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.**

Pour tout $n \geq 1$, f_n est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Soit $x, y \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies \forall n \geq 1, f_n(y) \leq f_n(x) \\ &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \\ &\implies f(y) \leq f(x) \end{aligned}$$

Alors f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

⑤ **Montrons que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$.**

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} &\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{-x}} = 1 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x f(x) = 1 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x(\sqrt{n}-1)} = 1 \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $g_n(x) = e^{-x(\sqrt{n}-1)}$.

► Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$.

► $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$:

Montrons que $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$ (c'est un voisinage de $+\infty$).

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\|g_n\|_\infty = \sup_{x \in [1, +\infty[} |g_n(x)| = \sup_{x \in [1, +\infty[} |e^{-x(\sqrt{n}-1)}| = \sup_{x \in [1, +\infty[} e^{-x(\sqrt{n}-1)} = e^{-(\sqrt{n}-1)}$$

Comme $e^{-(\sqrt{n}-1)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $\sum_{n \geq 1} \|g_n\|_\infty = \sum_{n \geq 1} e^{-(\sqrt{n}-1)}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[1, +\infty[$.

D'après le théorème de double limite, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x(\sqrt{n}-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$$

Corrigé de l'exercice № 8.

① Montrons que $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur I .

► Si $x = 0$, pour tout $n \geq 2$, $f_n(0) = 0$, alors $\sum_{n \geq 2} f_n(0)$ converge.

► Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$ converge.

On en déduit alors que $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur I .

② Soit $a > 0$.

► **Convergence normale sur $[a, +\infty[$**

Pour tout $n \geq 2$,

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in [a, +\infty[} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} = \sup_{x \in [a, +\infty[} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} \sup_{x \in [a, +\infty[} xe^{-nx}$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $\varphi_n(x) = xe^{-nx}$.

On a φ_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq a$, $\varphi'_n(x) = (1 - nx)e^{-nx}$.

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$\varphi'_n(x)$	+	0	-
$\varphi_n(x)$	0	$\varphi_n\left(\frac{1}{n}\right)$	0

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{1}{n} < a$.

Alors pour tout $n \geq N$, φ_n est décroissante sur $[a, +\infty[$, ainsi

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{\ln(n)} \sup_{x \in [a, +\infty[} xe^{-nx} = \frac{1}{\ln(n)} \sup_{x \in [a, +\infty[} \varphi_n(x) = \frac{1}{\ln(n)} \varphi_n(a) = \frac{ae^{-na}}{\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où la convergence est normale sur $[a, +\infty[$.

► **Convergence normale sur $[0, +\infty[$**

D'après le tableau précédent, on a

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{\ln(n)} \sup_{x \in [0, +\infty[} xe^{-nx} = \frac{1}{\ln(n)} \sup_{x \in [0, +\infty[} \varphi_n(x) = \frac{1}{\ln(n)} \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e \cdot n \ln(n)}$$

Il s'agit d'une série de Bertrand divergente ($\alpha = \beta = 1$), d'où la convergence n'est pas normale sur I .

③ Montrer que $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge uniformément sur I .

- D'après la question ①, $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur I .

- Montrons que $(R_n)_{n \geq 2}$ converge uniformément vers 0 sur I . Pour tout $n \geq 2$, et $x > 0$:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln(k)} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln(k)} \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e^{-x})^k \quad \text{car } 0 \leq e^{-x} < 1 \\ &\leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-x})^k = \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} \times \frac{1}{\ln(n+1)} \end{aligned}$$

Comme $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, alors la tangente en 0 est au dessous de la courbe.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 1 \leq e^x$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

Par suite $\forall x > 0$, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$, d'où $\forall x \in I$, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$, car $R_n(0) = 0$.

Or la majoration est indépendante de x et converge vers 0, alors la convergence est uniforme sur I .

④ ► Montrons que f est continue sur I .

- Pour tout $n \geq 2$, f_n est continue sur I .
- D'après la question précédente, $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge uniformément sur I .

D'après le théorème de continuité, on en déduit que f est continue sur I .

► Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 2$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$f'_n(x) = \frac{(1 - nx)e^{-nx}}{\ln(n)}$$

- D'après la question ①, $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur I .
- Montrons $\sum_{n \geq 2} f'_n$ converge uniformément sur tout segment $]0, +\infty[$.

Soit $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$.

Pour tout $n \geq 2$,

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \left| f'_n(x) \right| = \left| \frac{(1 - nx)e^{-nx}}{\ln(n)} \right| = \frac{(1 - nx)e^{-nx}}{\ln(n)} \leq \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} \leq \frac{e^{-n\alpha}}{\ln(n)}$$

Or la majoration est indépendante de x et $\sum_{n \geq 2} \frac{e^{-n\alpha}}{\ln(n)}$ converge, car $\frac{e^{-n\alpha}}{\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

puisque $\alpha > 0$. Alors $\sum_{n \geq 2} f'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\alpha, \beta]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1 - nx)e^{-nx}}{\ln(n)}$$

⑤ Montrons que f n'est pas dérivable en 0.

On a $f(0) = 0$, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

Remarquons que $x \mapsto \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, alors elle admet une limite ℓ (non nécessairement finie) en 0^+ .
Soit $N \geq 2$, on a

$$\frac{f(x)}{x} \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} \quad \text{car} \quad \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} \geq 0$$

En passant à limite quand x tend vers 0^+ , on en déduit que :

$$\ell \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln(n)}$$

Puisque $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge et à terme positifs, alors $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = +\infty$.

En passant à limite quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\ell \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = +\infty$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ell = +\infty$, ainsi f n'est pas dérivable en 0.

Corrigé de l'exercice N° 9.

Pour tout $k \geq 1$, et $x \in I$, on pose $f_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{x}{k(k+x)}$.

① ► Montrer que S est définie I .

Soit $x \in I$, $f_k(x) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$ de signe constant.

Par la règle d'équivalence $\sum_{k \geq 1} f_k(x)$ est convergente.

Donc S est définie sur I .

► Montrer que S est définie et continue sur I .

- Pour tout $k \geq 1$, f_k est continue sur I .
- Montrons que $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge uniformément sur tout segment de I .

Soit $[\alpha, \beta] \subset I$, posons $c = \max(|\alpha|, |\beta|)$

Pour tout $k \geq 1$ et $x \in [\alpha, \beta]$, on a

$$|f_k(x)| = \frac{|x|}{k(k+x)} \leq \frac{c}{k(k+\alpha)}$$

Comme la majoration est indépendante de x et $\sum_{k \geq 1} \frac{c}{k(k+\alpha)}$ converge,

Car $\frac{c}{k(k+\alpha)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{k^2}$.

Alors $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\alpha, \beta]$.

D'après le théorème de continuité, on en déduit que S est continue sur I .

② Monotonie de S .

Pour tout $k \geq 1$, f_k est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'_k(x) = \frac{1}{k} \times \frac{k}{(k+x)^2} = \frac{1}{(k+x)^2} > 0$.

Alors f_k est strictement croissante sur I .
Soit $x, y \in I$,

$$\begin{aligned} x < y &\implies \forall k \geq 1, f_k(x) < f_k(y) \\ &\implies \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) < \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y) \\ &\implies S(x) < S(y) \end{aligned}$$

Donc S est strictement croissante sur I .

③ Soit $x \in I$.

► Calculons $S(x+1) - S(x)$.

Pour tout $n \geq 1$ et $x \in I$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$.

$$\begin{aligned} S_n(x+1) - S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x} \\ &= -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x} \\ &= -\frac{1}{n+1+x} + \frac{1}{1+x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

D'autre part $S_n(x+1) - S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x+1) - S(x)$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}$.

► Cherchons un équivalent de S à droite de -1 .

On a $\forall x > -1$, $S(x) = \frac{1}{1+x} + S(x+1)$, donc $(1+x)S(x) = 1 + (1+x)S(x+1)$

Comme S est continue sur I , en particulier en 0 , alors $S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow (-1)^+} S(0) = 0$.

Par suite $(1+x)S(x) = 1 + (1+x)S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow (-1)^+} 1$.

D'où $S(x) \underset{x \rightarrow (-1)^+}{\sim} \frac{1}{1+x}$, par conséquent $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow (-1)^+} +\infty$.

③ (a) Montrons que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

Pour tout $x > 0$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)$$

Avec $\forall t \in]0, +\infty[$, $g(t) = \frac{x}{t(t+x)}$, on a g est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Car $\forall t > 0$, $g'(t) = -\frac{2xt + t^2}{(t(t+x))^2} < 0$, ($x > 0$).

Pour tout $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 k \leq t \leq k+1 &\implies g(k+1) \leq g(t) \leq g(k) \\
 &\implies \int_k^{k+1} g(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} g(t)dt \leq \int_k^{k+1} g(k)dt \\
 &\implies g(k+1) \leq \int_k^{k+1} g(t)dt \leq g(k) \\
 &\implies \sum_{k=1}^{+\infty} g(k+1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} g(t)dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g(k) \\
 &\implies \sum_{k=2}^{+\infty} g(k) \leq \int_1^{+\infty} g(t)dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g(k) \\
 &\implies \sum_{k=1}^{+\infty} g(k) - g(1) \leq \int_1^{+\infty} g(t)dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g(k) \\
 &\implies S(x) - \frac{x}{1+x} \leq \left[\ln \left(\frac{t}{t+x} \right) \right]_{t=1}^{+\infty} \leq S(x), \text{ car } g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \\
 &\implies S(x) - \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq S(x) \\
 &\implies \ln(1+x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}
 \end{aligned}$$

(b) Montrons que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.

D'après la question précédente, $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

Donc $\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq S(x) \leq \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x}$.

Alors $1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \leq \frac{S(x)}{\ln(x)} \leq 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} + \frac{x}{(1+x)\ln(x)}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} + \frac{x}{(1+x)\ln(x)} = 1$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{\ln(x)} = 1$, par suite $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.

⑤ (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Nous allons procéder un raisonnement par récurrence sur $n \geq 1$.

► **Initialisation :**

Par une somme télescopique on a $S(1) = 1$.

► **Hérédité :**

Soit $n \geq 1$, supposons que $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

D'après la question précédente :

$$S(n+1) = S(n) + \frac{1}{1+n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{1+n} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Récurrence achevée.

(b) Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Nous allons démontrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée.

► D'après la question précédente, $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq S(x)$,
donc $\forall n \geq 1, x_n = S(n) - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n) > 0$, d'où $(x_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0.

► Pour tout $n \geq 2$, $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Comme la fonction $h : t \mapsto t + \ln(1 - t)$ est décroissante sur $[0, 1[$.
Alors pour tout $t \in [0, 1[$, $h(t) \leq h(0) = 0$.

Par suite, pour tout $n \geq 2$, $x_n - x_{n-1} = h\left(\frac{1}{n}\right) \leq 0$.

Ainsi $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Il s'ensuit que $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

(c) **Montrons que** $\int_0^1 S(t)dt = \gamma$.

Nous allons appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

► Pour tout $k \geq 1$, f_k est continue sur le segment $[0, 1]$.

► D'après la question ①, $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge uniformément sur tout segment de I , en particulier elle converge uniformément sur $[0, 1]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(t)dt &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+t} \right) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+t} \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{t}{k} - \ln(k+t) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - (\ln(1+k) - \ln(k)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - (\ln(1+k) - \ln(k)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(1+k) - \ln(k)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(1+n) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x_n + \ln\left(\frac{n}{1+n}\right) \right) = \gamma \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice N° 10.

Pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

① **Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.**

► Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$:

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

► **Montrons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.**

Soit $x \in [0, +\infty[$.

Comme la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n \geq 1}$ positive, décroissante et converge vers 0, alors d'après le critère

spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

► Montrons que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Comme la suite $\left(\frac{1}{(n+x)^2}\right)_{n \geq 1}$ positive, décroissante et converge vers 0, alors d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

De plus, pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+x)^2} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1+x)^2} \right| = \frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Or la majoration est indépendante et converge vers 0, alors $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

► Monotonie de S .

Soit $x \geq 0$, comme $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ est la somme d'une série alternée, alors le signe de

$S'(x)$ est celui de son premier terme $\frac{(-1)^{1+1}}{(1+x)^2} \geq 0$,

Donc $\forall x \geq 0$, $S'(x) \geq 0$, Par suite S est croissante sur $[0, +\infty[$.

② Montrons que pour tout $x \geq 0$, $S(x+1) + S(x) = \frac{-1}{x+1}$.

Soit $x \geq 0$

$$\begin{aligned} S(x+1) + S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \\ &= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \left(\frac{-1}{1+x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \right) \\ &= \frac{-1}{1+x} \end{aligned}$$

③ Dédisons que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2x}$.

Comme S est croissante, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 S(x-1) \leq S(x) \leq S(x+1) &\implies S(x) + S(x-1) \leq 2S(x) \leq S(x+1) + S(x) \\
 &\implies \frac{-1}{x} \leq 2S(x) \leq \frac{-1}{x+1} \\
 &\implies \frac{x}{x+1} \leq \frac{S(x)}{\frac{-1}{2x}} \leq 1 \\
 &\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{\frac{-1}{2x}} = 1 \\
 &\implies S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2x}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice N° 11.

① Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Une primitive de $t \mapsto e^{int}$ est donnée par $t \mapsto \frac{1}{in} e^{int}$ si $n \neq 0$.

► Si $n \neq 0$, alors $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \left[\frac{1}{in} e^{int} \right]_0^{2\pi} = 0$.

► Si $n = 0$, $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

On en déduit alors que $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$.

② Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > 1$.

On a

$$\frac{1}{z - e^{it}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{z}} \underset{\text{car } \left| \frac{e^{it}}{z} \right| = \frac{1}{|z|} < 1}{=} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{it}}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{z^{n+1}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 2\pi]$, on pose $f_n(t) = \frac{e^{int}}{z^{n+1}}$.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[0, 2\pi]$.

► Montrons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Pour tout $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f_n(t)| = \left(\frac{1}{|z|} \right)^{n+1}$, donc la série géométrique

$\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{|z|} \right)^{n+1}$ converge, car $\frac{1}{|z|} < 1$, par suite la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0, 2\pi]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}} &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{z^{n+1}} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{z^{n+1}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{int} dt \right) \\
 &= \frac{2\pi}{z} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{int} dt \right)}_{=0} = \frac{2\pi}{z}
 \end{aligned}$$