

Exercice 2

1) Soit $x > 0$; on a $\frac{1}{(n+1)(n+x)} \sim \frac{1}{n^2}$
et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV et à termes positifs

Alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(x+n)}$ converge.

2) a) on a. $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x - (n+1)}{(n+1)(n+x)} = \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} = (x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)} = U(x)$

b) Soit $f_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$
• $\forall m \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
• $\forall x > 0$; $f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$

• La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.S sur $]0, +\infty[$.

• La série $\sum_{n \geq 0} f'_n$ C.S sur $]0, +\infty[$

car $\frac{1}{(n+x)^2} \sim \frac{1}{n^2}$

• La fonction $x \mapsto \frac{1}{(n+x)^2}$ est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f'_n(x)| = \frac{1}{n^2}$

Séries de fonctions

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f'_n(x)| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ CV}$$

D'où $\sum_{n \geq 1} f'_n \text{ CV} \Rightarrow \text{CV sur }]0, +\infty[$

D'après le th de dérivation:

$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $\forall x > 0$, $U'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$

$$\Rightarrow \forall x > 0, U'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

3) a) $x U(x) = x(x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)}$
 $= x(x-1) \cdot \frac{1}{x} + x(x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)}$
 $= (x-1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x(x-1)}{(n+1)(n+x)}$

Soit $U_n(x) = \frac{x(x-1)}{(n+1)(n+x)}$; $x \in]0, 1]$

$$|U_n(x)| = \frac{x(1-x)}{(n+1)(n+x)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall x \in]0, 1]$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in]0, 1]} |U_n(x)| \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ CV, d'où:

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in]0, 1]} |U_n(x)| \text{ CV} \Rightarrow$$

$$\sum_{n \geq 1} U_n \subset \mathbb{N} \Rightarrow C. U \text{ sur }]0, 1]$$

De plus; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} U_n(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = 0$$

Ainsi: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x U(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$

b) On a. $U'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow U$ est une fonction croissante, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \begin{cases} L & \text{ou} \\ +\infty \end{cases}$

Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = L < \infty$.

On remarque que pour $x > 1$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} > 0$

Alors $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) \geq \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$$

$$\parallel \geq \sum_{n=0}^N \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$$

$$\parallel \geq \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1}, \forall N \in \mathbb{N}.$$

ce qui est absurde car $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} = +\infty$

Ainsi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} 4) \quad \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV et à termes positifs
d'où la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$ CV.

$$Y = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

$$5) \quad \int_1^x U(x) dx = \int_1^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) \right) dx$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$; f_n est continue sur $[1, 2]$.

• $|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right|; \forall x \in [1, 2]$

$$\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}; \forall x \in [1, 2]$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [1, 2]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

or $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$ CV, d'où la série

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in [1, 2]} |f_n(x)| \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n \subset \mathbb{N} \Rightarrow \underline{\underline{CU}} \text{ sur } [1, 2]$$

Alors d'après le théorème de permutabilité

$\int$ et $\sum$ sur un segment, on déduit

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \gamma$$

Ainsi: $\boxed{\int_1^2 u(x) dx = \gamma}$

6) Soit $x > 0$.

$$u(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+x}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} - \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\boxed{u(x+1) = u(x) + \frac{1}{x}}$$

7). $h(x) = \int_x^{x+1} u(t) dt$

La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $h'(x) = u(x+1) - u(x) = \frac{1}{x}$

Comme h est continue sur $]0, +\infty[$, alors $h(x) = \ln x + cte$.

or $h(1) = \int_1^2 u(x) dx = \gamma \Rightarrow cte = \gamma$

Ainsi $h(x) = \ln x + \gamma; \forall x > 0$

8) $\int_1^3 u(t) dt = \int_1^2 u(t) dt + \int_2^3 u(t) dt$
 $= \gamma + \ln 2$

Exercice 2

1) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, donc elle est cv ssi $x > 1$

Alors $D_f =]1, +\infty[$.

* Mg $D_p =]0, +\infty[$.

• Si $x > 0$: la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ vérifie le T.S.A, alors elle est cv.

• Si $x \leq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^x} \right| = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x} \text{ div}$$

Alors $D_p =]0, +\infty[$

2) i) f est continue sur $]1, +\infty[$
 Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$ ($1 < a < b$)

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{1}{n^x} \right| = \frac{1}{n^a}$$

Comme $a > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{1}{n^x} \right| < +\infty$ C.V.

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \text{ C.V.} \Rightarrow \text{C.V. sur } [a, b]$$

De plus la fonction $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 D'où $\sum$ est continue sur $]1, +\infty[$.

ii) f est continue sur $]0, +\infty[$.

$$\text{Soit } u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}; \quad x \in]0, +\infty[$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $]0, +\infty[$.

$[a, b] \subset]0, +\infty[$; $a > 0$.

D'après le T.S.A. ; $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b]; |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [a, b]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où $\sum u_n$ C.V. sur $[a, b]$.

Ainsi f est continue sur $]0, +\infty[$.

3) Soient $x, y \in]1, +\infty[$ tq $x \leq y$
 $\Rightarrow n^x \leq n^y; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{n^y}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y}$$

$\Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$. D'où f est $\searrow$

$$4) \text{ On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ C.V. sur $[e, +\infty[$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n} \exists$

Supposons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ C.V. sur $]1, +\infty[$, alors d'après le th de permutation $\sum$ et $\lim$, on déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ C.V. ce qui est absurde.. Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne C.V. pas

Uniformement sur $]1, +\infty[$.

c) 119. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \xi(x) = +\infty$

On a ξ est $\downarrow$ sur $]1, +\infty[$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \xi(x) = \begin{cases} l < \infty \\ \text{ou} \\ +\infty \end{cases}$$

Supposons que $\lim_{x \rightarrow 1+0} \xi(x) = l < \infty$

On a $\frac{1}{nx} > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nx} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{kx}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1+0} \xi(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1+0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{kx} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq l; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ce qui est impossible car la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \xi(x) = +\infty$.

5) a) 119 ξ est ∞ sur $]1, +\infty[$.

$$\text{Soit } f_n(x) = \frac{1}{n^x}; \quad x \in]1, +\infty[$$

$$= e^{-x \ln n}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; f_n est ∞ sur $]1, +\infty[$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(\ln n)^k}{n^x}.$$

Puisque $x > 1$, alors $\exists \alpha < x$

$$n^\alpha \cdot |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^{x-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow f_n^{(k)}(x) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ C.V. et α est positif ($\alpha > 1$), alors la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}(x)$

Converge; $\forall x > 1 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ C.S. sur $]1, +\infty[$

• Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$.

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^a}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [a, b]} |f_n^{(k)}(x)| = \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^k}{n^a} \quad \text{car } (x=a > 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n^{(k)} \text{ C.V.} \Rightarrow \text{C.V. sur } [a, b]$$

Ceci montre que ξ est ∞ sur $]1, +\infty[$

et que $\xi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^x}, \quad \forall x > 1$

$$b) \quad \xi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x}$$

$$\Rightarrow \xi''(x) \geq 0 \Rightarrow \xi \text{ est convexe.}$$

(5)

$$6) a) \xi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Soit $f(t) = \frac{1}{t^x}$; $t \in [1, +\infty[$. fat

$\forall k \geq 1$; $\forall k \leq t \leq k+1$

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \frac{1}{k^x}$$

On remplace k par $k-1$, pour $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \frac{1}{(k-1)^x}$$

$\Rightarrow \forall k \geq 2$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^x} dt$$

D'après (*)

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^x} \leq \int_1^n \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{1-x} \left[\frac{1}{t^{x-1}} \right]_1^n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{x-1} \left(1 - \frac{1}{n^{x-1}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \right| \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

D'après (*) qui est valable; $\forall k \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right)$$

$$n \rightarrow +\infty, \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \right| \geq \frac{1}{x-1} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \frac{1}{x-1} \leq \xi(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

b) D'après a) $1 \leq \frac{\xi(x)}{1/x-1} \leq (x-1)+1$

$\nearrow 1 \quad \nwarrow x \rightarrow 1+$

$$\Rightarrow \xi(x) \sim \frac{1}{x-1}$$

F) a) soit $x > 1$

$$p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^x}$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^x} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^x}$$

$$= \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^x}$$

$$= \frac{1}{2^x} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^x} \right)$$

$$= \frac{2}{2^x} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x}$$

$n \rightarrow +\infty$, on obtient:

$$p(x) = \xi(x) \left(\frac{1}{2^{x-1}} - 1 \right)$$

b) D'après a) $\lim_{x \rightarrow 1+} p(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \xi(x) \left(\frac{1}{2^{x-1}} - 1 \right)$

$= -1$

$\mathcal{E} = \{ f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est continue.} \}$

et $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ intégrable sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow \Pi \mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

Dna.

$\mathcal{E} \subset C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions continues

• $0 \in \mathcal{E}$.

• Soient $f, g \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors f est continue et $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ intég
 g " " et $t \mapsto \frac{g(t)}{1+t^2}$ intég

D'où $\lambda f + g$ est continue.

$$0 \leq \left| \frac{\lambda f(t) + g(t)}{1+t^2} \right| \leq \underbrace{\frac{|\lambda f(t)|}{1+t^2}}_{\text{intég}} + \underbrace{\frac{|g(t)|}{1+t^2}}_{\text{intég}}$$

Alors $\frac{\lambda f + g}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow \lambda f + g \in \mathcal{E}$.

Ainsi $\mathcal{E}$ est un sous-e.v. de $C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

* si $f \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists \pi \geq 0$ tq. $|f(x)| \leq \pi$, on

$$\Rightarrow \left| \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{1+t^2}$$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

De plus f est continue, alors $f \in \mathcal{E}$.

$\Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$

2. $t \mapsto \frac{g(t)}{1+t^2} \forall t$ est continue sur $[0, +\infty[$

$$\left| \frac{g(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$$

or la fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ est continue positive et intégrable sur $[0, +\infty[$

(car au ∞ ; $\frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^{3/2}}$ ($\frac{3}{2} > 1$))

$\Rightarrow t \mapsto \frac{g(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow g \in \mathcal{E}$.

* Soit $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \in [0, +\infty[$.

$$g(x_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$\Rightarrow g$ n'est pas bornée. $\Rightarrow g \notin \mathcal{B}$

$\Rightarrow \mathcal{E} \not\subset \mathcal{B}$

3) soit $x > -1$ et $f \in \mathcal{E}$.

$\Rightarrow f$ est continue et $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ intég.

Pour $x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Au v. $+\infty$, $\left| \frac{f(t)}{1+t^2+x} \right| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|f(t)|}{1+t^2}$ qui est intégr.

$t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégr sur $[0, +\infty[$.

4) Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{n+1}} dt x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n f(t) x^n}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

à justifier $\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n f(t) x^n}{(1+t^2)^{n+1}} dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-x}{1+t^2} \right)^n dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{1+t^2}} dt$$

car $\left| \frac{-x}{1+t^2} \right| \leq |x| < 1$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2+x} dt$$

Justification de $\textcircled{*}$.

Soit $f_n(t) = \frac{(-1)^n f(t) x^n}{(1+t^2)^{n+1}} ; t \in \mathbb{R}.$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue.

$$|f_n(t)| = \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{n+1}} x^n \leq \frac{|f(t)|}{1+t^2} \text{ qui est intégr.}$$

$\Rightarrow f_n$ est intégrable, $\forall n \in \mathbb{N}$

• La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.S. sur $[0, +\infty[$.

vers la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ qui est continue.

• Mq $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ cv.

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{|f(t)|}{1+t^2}}_{\text{c.t.}} dt \cdot |x|^n$$

car $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ cv, car $|x| < 1$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \text{ cv.}$$

Ainsi la permutation $\sum$ et $\int$ est justifiée d'après le T.I. T.T.

exercice 4

1) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, alors elle cv ssi $x > 1 \Rightarrow D_f =]1, +\infty[$

e) Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$

$t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et positive.

Au v(0) $e^t - 1 \sim_0 t \Rightarrow \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \sim_0 t^{x-2}$

or $t \mapsto t^{x-2} = \frac{1}{t^{2-x}}$ est intégrable au v(0) car $x > 1 \Rightarrow 2-x < 1$

$\Rightarrow t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

• Au v(+\infty) $t^2 \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \sim_{+\infty} \frac{e^{-t} t^{x+1}}{1} \xrightarrow[t \mapsto +\infty]{} 0$

$\Rightarrow \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au v(+\infty), alors $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ est intégrable au v(+\infty)

$\Rightarrow t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ $\forall x > 1$

$\Rightarrow F$ est bien définie sur $]1, +\infty[$
3) soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto e^{-nt} t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Au v(0) $e^{-nt} t^{x-1} \sim_0 t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ intégrable $1-x < 1$

Au v(+\infty) $t^2 e^{-nt} t^{x-1} = e^{-nt} t^{x+1} \xrightarrow[t \mapsto +\infty]{} 0 \quad (n > 0)$

$\Rightarrow e^{-nt} t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto e^{-nt} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

* $\int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^{x-1} \frac{du}{n}$
($u = nt$)

$= \frac{1}{n^x} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du \Rightarrow$

$\int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} dt = \frac{\Gamma(x)}{n^x}$

b) soit $x > 1$: $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{x-1}}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n dt$

$\Rightarrow F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t} t^{x-1} dt \quad (t > 0 \Rightarrow 0 < e^{-t} < 1)$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} dt$$

⊙
à justifier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{x-1} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x} = \Gamma(x) \zeta(x)$$

Pour justifier ⊙.

Soit $f_n(t) = e^{-nt} t^{x-1}$; $x \in]0, +\infty[$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue, positive, et intégrable d'après 3.a/

• La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ c. s vers $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ s est continue sur $]0, +\infty[$.

• La série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \sum_{n \geq 1} \frac{\Gamma(x)}{n^x}$ qui est cv ($x > 1$)

D'où la justification de permutation par le T.I.T.T.

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = F(2) = \Gamma(2) \cdot \zeta(2)$$

$$\text{or } \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right|$$

$$5) a) \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{e^{u^2} - 1} du, \text{ on pose } t = u^2 \quad \begin{aligned} dt &= 2u du \\ &= 2t^{\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^t - 1} dt = \frac{1}{2} \cdot F\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$\text{or } \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{e^{u^2} - 1} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \right|$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+u))^2}{u^2} du$$

I.P.P.

$$f = (\ln(1+u))^2$$

$$g' = \frac{1}{u^2}$$

$$f' = \frac{2 \ln(1+u)}{1+u}$$

$$g = -\frac{1}{u}$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow 0}} \left[\frac{\ln(1+u)}{u} \right]^2 \Big|_x^y + \int_x^y \frac{\ln(1+u)}{u(1+u)} du$$

$$\text{or } \frac{(\ln(1+u))^2}{u} \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{u} = u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{(\ln(1+y))^2}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1+u)}{u} \right)^2 du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u(1+u)} du$$

$$\left(\text{on pose } t = \ln(1+u) \right) \begin{cases} dt = \frac{1}{1+u} du \end{cases} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 2\zeta(2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1+u)}{u} \right)^2 du = 2\zeta(2)$$

$$6) \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\Rightarrow \frac{\zeta(x) - 1}{\frac{1}{2^x}} = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^x$$

$$\text{Soit } f_n(x) = \left(\frac{2}{n} \right)^x; n \geq 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \frac{2}{n}} = 0$$

Soit $\alpha > 1$

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in [a, +\infty[} \left(\frac{2}{n} \right)^x = \left(\frac{2}{n} \right)^a = \frac{2^a}{n^a}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 3} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \sum_{n \geq 3} \frac{2^a}{n^a} < +\infty \quad (\alpha > 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 3} f_n \text{ C.V.} \Rightarrow \text{C.U sur } [a, +\infty[$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^x = \sum_{n=3}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\zeta(x) - 1}{\frac{1}{2^x}} = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\zeta(x) - 1}{\frac{1}{2^x}} - 1 \right|$$

$$7) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t-1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} (1 - e^{-t} + e^{-t})}{e^t(e^t-1)} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -\frac{t^{x-1}}{e^t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1} dt$$

$$= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$= F(x) - \Gamma(x) = \Gamma(x)\zeta(x) - \Gamma(x)$$

$$= \Gamma(x)(\zeta(x) - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x)}{2^x}$$

Problème

$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et décroissante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$x > 0, k \in \mathbb{N};$

$$U_k(x) = f(x+k) - \int_{k+x}^{x+k+1} f(t) dt$$

1) a) $\forall k+x \leq t \leq x+k+1$

$$f(x+k+1) \leq f(t) \leq f(x+k) \quad (f \text{ est } \searrow)$$

$$\Rightarrow f(x+k+1) \leq \int_{k+x}^{x+k+1} f(t) dt \leq f(x+k)$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x+k) - \int_{k+x}^{x+k+1} f(t) dt \leq f(x+k) - f(x+k+1)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq U_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$$

b) Soit $U_k(x) = f(x+k) - f(x+k+1)$

Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x+k) = 0$, alors

la série télescopique $\sum_{k \geq 0} U_k = \sum_{k \geq 0} (f(x+k) - f(x+k+1))$ C.V.

Alors $\sum_{k \geq 0} U_k(x)$ converge ; $\forall x > 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} U_k \text{ C.S sur }]0, +\infty[$$

$$2) 1) f(x) = e^{-x}$$

f est $\searrow$ continue et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

D'après ce qui précède $\cup$ existe.

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(x)$$

$$\text{avec } U_k(x) = f(x+k) - \int_{k+x}^{x+k+1} f(t) dt$$

$$= e^{-x-k} + [e^{-t}]_{k+x}^{x+k+1}$$

$$= e^{-k-x-1} = e^{-k} \cdot e^{-x-1}$$

$$\Rightarrow U(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} \right) e^{-x-1} = e^{-x-1} \frac{1}{1-e^{-1}}$$

$$= \frac{e^{-x-1}}{e^{-1}}$$

$$\Rightarrow U(x) = \frac{e^{-x}}{e-1} ; x > 0$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p > n$.

D'après 1/a).

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^p U_k \leq \sum_{k=n+1}^p (f(x+k) - f(x+k+1))$$

$$\leq f(x+n+1) - f(x+p+1)$$

$$\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k \leq f(x+n+1) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty}$$

$0 \leq R_n(x) \leq f(x+n+1), \forall x \geq 0$
 1) q. $\forall n \in \mathbb{N}; U_n(x) = f(x+n) - \int_{x+n}^{x+n+1} f(t) dt$
 • On a f est continue $\Rightarrow x \mapsto f(x+n)$
 est continue sur $]0, +\infty[$
 • $x \mapsto x+n+1$ et $x \mapsto x+n$ sont continues
 alors $x \mapsto \int_{x+n}^{x+n+1} f(t) dt$ est continue
 D'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 • D'autre part on a,

$$0 \leq R_n(x) \leq f(x+n+1) \leq f(n+1) \quad (f \text{ est } \downarrow)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sup_{x \in]0, +\infty[} R_n(x) \leq f(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow R_n \xrightarrow{CU} 0 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum_{n \geq 0} U_n \text{ CU sur }]0, +\infty[\right] \quad (E)$$

$$\xRightarrow{(1)+(2)} U = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \text{ est continue sur }]0, +\infty[.$$

b) On a $0 \leq U_n(x) \leq f(x+n) - f(x+n+1)$
 $\searrow \quad \swarrow$
 $0 \quad x \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n(x) = 0$$

et on a $\sum_{n \geq 0} U_n \subset \mathcal{U}$ sur $]0, +\infty[$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n(x) \quad "0"$$

$$\Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0 \right]$$

5) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

a) Soit $\varepsilon > 0$.

On a $\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_x^{x+\varepsilon} f(t) dt + \int_{x+\varepsilon}^{x+1} f(t) dt$

On a f est $\downarrow$, d'où $\forall x \leq t \leq x+\varepsilon$

$$\Rightarrow f(t) \leq f(x) \Rightarrow \int_x^{x+\varepsilon} f(t) dt \leq \int_x^{x+\varepsilon} f(x) dt = \varepsilon f(x)$$

• $\forall x+\varepsilon \leq t \leq x+1 \Rightarrow f(t) \leq f(x+\varepsilon)$

$$\Rightarrow \int_{x+\varepsilon}^{x+1} f(t) dt \leq \int_{x+\varepsilon}^{x+1} f(x+\varepsilon) dt$$

$$\leq (1-\varepsilon) f(x+\varepsilon)$$

$$\leq f(x+\varepsilon)$$

Ainsi $\left| \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \varepsilon f(x) + f(x+\varepsilon) \right|$

$$b) \frac{\int_x^{x+1} f(t) dt}{f(x)} \leq \frac{\varepsilon f(x) + f(x+\varepsilon)}{f(x)}$$

$$\leq \varepsilon + \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)}$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]0, \delta[; \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\int_x^{x+1} f(t) dt}{f(x)} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{x+1} f(t) dt}{f(x)} = 0$$

$$c) \text{ La suite } \sum_{k \geq 0} U_k \text{ c.s. } \frac{U_k(x)}{f(x)}$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k(x)}{f(x)} = \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)}{f(x)}$$

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{f(x+n+1)}{f(x)}; \text{ d'après 3)}$$

$$\leq \frac{f(x+n+1)}{f(1)}; \forall x \in]0, 1[$$

$$\Rightarrow 0 \leq R_n(x) \leq \frac{f(n+1)}{f(1)}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in]0, 1[} |R_n(x)| \leq \frac{f(n+1)}{f(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 0} U_k \text{ C.U. sur }]0, 1[$$

$$b) U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$$

$$\Rightarrow \frac{U(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n(x)}{f(x)}$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq \frac{U_n(x)}{f(x)} \leq \frac{f(x+n) - f(x+n+1)}{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+n) - f(x+n+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{f(n) - f(n+1)}{+\infty} = 0$$

$$\bullet \text{ Si } n=0$$

$$\frac{U_0(x)}{f(x)} = \frac{f(x) - \int_x^{x+1} f(t) dt}{f(x)}$$

$$= 1 - \frac{\int_x^{x+1} f(t) dt}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{1} = 0$$

$$\bullet \text{ De plus la suite } \sum_{n \geq 0} \frac{U_n(x)}{f(x)} \text{ C.U. sur }]0, 1[$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{U_n(x)}{f(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow U(x) \sim_{ot} f(x)$$