

Correction Série II". Suite de fonctions"

Exercice 3.

— Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et pour $x \neq 0$,

$$f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{nx^3} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement (CVS) sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

— On a

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n^2}{n^2 + 1} \rightarrow 0$$

Donc la suite ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

— Cependant, pour $x > a > 0$, $|f_n(x)| \leq \frac{2nx}{n^2x^4} = \frac{2n}{nx^3} \leq \frac{2}{na^3}$, donc

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{2}{na^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il y a bien convergence uniforme (CVU) sur $[a, +\infty[$.

2)

$$\text{si } x = 0, f_n(0) = 0 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{si } x > 0, f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(nx)}{nx} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (CVS) sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

— Pour tout $x > 1$, on a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(2) \not\rightarrow 0$. Donc, il n'y a pas de convergence uniforme (CVU) sur $\mathbb{R}_+$.

✗ Il est facile de vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$. Ainsi, pour $x \geq a > 0$, on aura, pour n assez grand (dès que $1 + na > e$), alors $f_n(x) \leq f_n(a)$. Donc, à partir d'un certain rang : $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, et il y a convergence uniforme (CVU) sur $[a, +\infty[$.

3) Exercice 5.

Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout n . Sinon, on a :

$$f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n x}{n 2^n x^2} = \frac{1}{n x} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, finalement, la suite converge simplement (CVS) sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2n} \left[\ln \left(1 + \frac{n}{x^2} \right) \right]_0^1 = \frac{\ln(1+n)}{2n}.$$

► Convergence simple :

On a alors, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\ln(1+n^2)}{2n} \sim \frac{\ln(n^2)}{2n} = \frac{\ln n + n \ln 2}{2n}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{\ln 2}{2}$. Cependant, $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$. Par négation du théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment, on en déduit qu'il n'y a pas convergence uniforme (CVU) sur tout le segment $[0, 1]$.

Cependant, si $x \in [\alpha, 1]$ avec $0 < \alpha < 1$, on a :

$$0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{2^n}{1+n^2\alpha^2}. \text{ Donc, } \sup_{x \in [\alpha, 1]} |f_n(x)| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et il y a convergence uniforme (CVU) sur cet intervalle.

Exercice 6

1) Notons $f_n(x) = \frac{1}{1+x+\dots+x^n}$. On a donc : $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{n+1} & \text{si } x = 1. \end{cases}$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

$$\left| \int_0^1 (f_n(x) - f(x)) dx \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x+\dots+x^n} - (1-x) \right) dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+\dots+x^n} dx.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}.$$

2) Notons $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ pour $x \in [0, 1]$.

Il est facile de voir que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$. De plus, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x} \right| \leq \frac{M}{n},$$

où M est la borne supérieure sur $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto |x^2 - xe^{-x}|$ (qui existe car cette fonction est continue sur un segment). Ainsi, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{M}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. Ce qui montre la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

D'après le théorème d'interversion limite-intégrale, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$.

3) Ici, on n'a pas besoin du théorème d'interversion limite-intégrale. Il suffit de majorer :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{n(x^3 + x)e^{-nx}}{nx + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{n(x^3 + x)e^{-nx}}{nx} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^{-nx} dx.$$

$$\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-nx} dx \leq 2 \int_0^1 e^{-nx} dx = 2 \cdot \frac{1 - e^{-n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, la limite cherchée vaut 0.

Corrigé de l'exercice N° 1.

► Convergence simple :

- Si $x \in]0, 1[$, $f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x) = n^\alpha e^{\ln(x)n} (1-x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, car $e^{\ln(x)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ($\ln(x) < 0$).
- Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Si $x = 1$, $f_n(1) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers f avec f est la fonction nulle.

► Convergence uniforme :

Pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x)$.

On a φ_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$

$$\varphi'_n(x) = n^{\alpha+1} x^{n-1} (1-x) - n^\alpha x^n = n^\alpha x^{n-1} (n(1-x) - x) = n^\alpha x^{n-1} (n - (n+1)x)$$

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$\varphi'_n(x)$		+	-
$\varphi_n(x)$	0	$\varphi_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	0

D'après le tableau de variations, on déduit que:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

Comme $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{-\frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$,

Alors $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1} = \frac{1}{e}$, donc $n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha e^{-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{en^{1-\alpha}}$.

Par suite

$$\begin{aligned} (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ cvu sur } [0, 1] \text{ vers la fonction nulle} &\iff \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\iff n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\iff \frac{1}{en^{1-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\iff 1 - \alpha > 0 \\ &\iff \alpha < 1 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice N° 2.

① Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

② Comme $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f \text{ n'est pas continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$ alors la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

③ Soit $a > 0$, on a

$$\sup_{x \in]0, a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in]0, a]} \left| \arctan(nx) - \frac{\pi}{2} \right| = \sup_{x \in]0, a]} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) \right) = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Car $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arctan(nx)$ est décroissante sur $]0, a]$.

Donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0, a]$.

Autre méthode : pour n assez grand $x_n = \frac{1}{n} \in]0, a]$ et on a

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \arctan(1) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0, a]$.

④ Soit $a > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [a, +\infty[} \left| \arctan(nx) - \frac{\pi}{2} \right| = \sup_{x \in [a, +\infty[} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(na) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Car $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arctan(nx)$ est décroissante sur $[a, +\infty[$.

Donc la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice N° ..

① Soit $x > 0$, on a $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, n > \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Donc

$$\forall n \geq N, f_n(x) = \inf \left(n, \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

D'où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f .

② Soit $a > 0$,

Pour tout $x \geq a$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$, alors $\forall n > \frac{1}{\sqrt{a}}$, on a $\inf \left(n, \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [a, +\infty[} \left| \inf \left(n, \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \\ &= \sup_{x \in [a, +\infty[} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \inf \left(n, \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\text{car } \forall n \geq \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{x}} - \inf \left(n, \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

③ Pour tout $n \geq 1$, $x_n = \frac{1}{4n^2} \in]0, +\infty[$ et on a

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \inf(n, 2n) - 2n = -n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice N° 4. Retour à l'énoncé

① Comme $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvu vers f sur $\mathbb{R}$, alors $\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

D'où $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Par suite $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |P_n(x) - P_N(x)| &= |(P_n(x) - f(x)) - (P_N(x) - f(x))| \\ &\leq |P_n(x) - f(x)| + |P_N(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

② Pour tout $n \geq N$, le polynôme $P_n - P_N$ est bornée, donc il est constant.

③ Comme $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvu vers f sur $\mathbb{R}$, alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvs vers f sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'une part, pour tout $n \geq N$,

$$P_n(x) = (P_n(x) - P_N(x)) + P_N(x) = (P_n(0) - P_N(0)) + P_N(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) - P_N(0) + P_N(x)$$

D'autre part $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = f(0) - P_N(0) + P_N(x)$.

Donc $f = f(0) - P_N(0) + P_N$ est une fonction polynomiale.

④ Pour tout $n \geq 1$, f_n est une fonction polynomiale et $(f_n)_{n \geq 1}$ cvs vers f où $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$, comme f n'est pas polynomiale, alors la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice N° 5. Retour à l'énoncé

Soit $\varepsilon > 0$.

① Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, alors elle est uniformément continue sur $[a, b]$, par suite il existe $\alpha > 0$ telle que $\forall x, y \in [a, b] \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas α ($\max_{0 \leq k \leq p-1} |a_{k+1} - a_k|$)

② Pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f_n(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a_i)$, car $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvs vers f sur $[a, b]$.

Alors $\exists N_i \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_i, |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $N = \max(N_0, \dots, N_p)$, alors $\forall n \geq N$ et $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

③ Nous allons démontrer que $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$ et $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $|a_{i+1} - a_i| \leq \alpha$, d'après la première question, on a $|f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \in [a, b]$, alors $\exists i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$.

Comme les fonctions f_n sont croissantes sur $[a, b]$, alors f l'est.

Alors pour tout $n \geq N$

$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(a_{i+1}) - f(a_i) \leq f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

et

$$f_n(x) - f(x) \geq f_n(a_i) - f(a_{i+1}) \geq f_n(a_i) - f(a_i) - \frac{\varepsilon}{2} \geq -\varepsilon$$

Donc $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, par suite $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

On en déduit que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

D'où $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

③ Prendre $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.

Corrigé de l'exercice N° 6. Retour à l'énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$

① ► Convergence simple :

Soit $t \geq 0$, comme $\frac{t^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ converge par le critère d'Alembert), donc

$f_n(t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvs vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

► Convergence uniforme :

Pour tout $n \geq 1$, on pose $\varphi_n(t) = |f_n(t) - f(t)| = |f_n(t)| = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$.

On a φ_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\varphi'_n(t) = \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} - \frac{t^n e^{-t}}{n!} = \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} \left(1 - \frac{t}{n}\right)$

t	0	n	$+\infty$
$\varphi'_n(t)$	+	0	-
$\varphi_n(t)$	0	$\varphi_n(n)$	0

D'après le tableau de variations, on déduit que:

$$\sup_{t \in [0, +\infty[} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t \in [0, +\infty[} \varphi_n(t) = \varphi_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$.

② ► $\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = 0$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = f(t) = 0$.

► Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

Par une intégration par parties

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} (e^{-t})' dt = - \left(\underbrace{\left[\frac{t^n e^{-t}}{n!} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt = I_{n-1} \end{aligned}$$

Donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, par suite $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

- ③ On a $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [0, +\infty[\\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0, +\infty[\\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt \end{cases}$, on en déduit alors que le théorème d'intégration n'est pas valable sur un intervalle quelconque.

Corrigé de l'exercice N° 7. Retour à l'énoncé

- ① Si $f = c$ est une fonction constante sur $[a, b]$, pour tout $n \geq 1$

$$J_n(f) = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = c \int_a^b \sin(nt) dt = -\frac{c}{n} [\cos(nt)]_a^b = -\frac{c}{n} (\cos(na) - \cos(nb))$$

Donc

$$|J_n(f)| \leq \frac{2|c|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par suite $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- ② Si f est en escalier sur $[a, b]$, alors $\exists \sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq p}$ une subdivision de $[a, b]$ telle que f est constante sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$, par la relation de Chasles :

$$J_n(f) = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \int_{x_0}^{x_p} f(t) \sin(nt) dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) \sin(nt) dt$$

Pour tout $k \in [0, p-1]$, f est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$, d'après la question précédente $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par suite $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- ③ ► **Rappel :** Pour tout $\varepsilon > 0$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, il existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ en escalier telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

► Montrons que $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux,

il existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ en escalier telle que $\|f - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n(f) = J_n(f - g) + J_n(g)$.

Comme g est en escalier, d'après la question précédente $J_n(g) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |J_n(g)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |J_n(f - g)| &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t)) \sin(nt) dt \right| \leq \int_a^b |(f(t) - g(t)) \sin(nt)| dt \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \leq \int_a^b \|f - g\|_\infty dt = (b - a) \|f - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

On en déduit $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |J_n(f)| \leq |J_n(f - g)| + |J_n(g)| < \varepsilon$.

D'où le résultat.

① (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\exists r \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^r \alpha_k X^k$

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)f(x)dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k x^k \right) f(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^r \alpha_k x^k f(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^r \alpha_k \underbrace{\int_a^b x^k f(x)dx}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

(b) ► **Rappel** : Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue est limite uniforme d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales : $\|P_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |P_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

► Montrons que f est nulle.

Nous allons démontrer que $\int_a^b f^2(t)dt = 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(t)dt &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t)f(t)dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b P_n(t)f(t)dt \text{ car } (P_n f)_{n \in \mathbb{N}} \text{ cv sur le segment } [a, b] \\ &\text{puisque } \|P_n f - f^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty \\ &= 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b P_n(t)f(t)dt = 0 \end{aligned}$$

Comme f^2 est continue et positive sur $[a, b]$ et d'intégrale nulle, alors $f^2 = 0$, par suite $f = 0$.

② (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-(1-i)x} dx$.

► **Existence** : Soit $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \mapsto x^k e^{-(1-i)x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (donc le problème se pose en $+\infty$).

on a $|f_k(x)| = x^k e^{-x}$, donc $f_k(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente, alors $\int_0^{+\infty} f_k(x)dx$ est convergente, d'où l'existence de I_k .

► **Calcul** : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, par une intégration par parties

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{+\infty} x^k e^{-(1-i)x} dx = \int_0^{+\infty} x^k \left(\frac{e^{-(1-i)x}}{i-1} \right)' dx \\ &= \underbrace{\left[\frac{x^k e^{-(1-i)x}}{i-1} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{k}{i-1} \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-(1-i)x} dx \\ &\text{car } |x^k e^{-(1-i)x}| = x^k e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ &= \frac{k}{1-i} \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-(1-i)x} dx = \frac{k}{1-i} I_{k-1} \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$I_k = \frac{k}{1-i} \times \frac{k-1}{1-i} \times \dots \times \frac{1}{1-i} I_0 = \frac{k!}{(1-i)^k} I_0 = \frac{k!}{(1-i)^{k+1}}$$

$$\text{car } I_0 = \frac{1}{1-i}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \frac{k!}{(1-i)^{k+1}}$,

Donc $I_{4k+3} = \frac{(4k+3)!}{(-4)^{k+1}} \in \mathbb{R}$, donc $\text{Im}(I_{4k+3}) = 0$, par suite $\int_0^{+\infty} \text{Im}(x^{4k+3} e^{-(1-i)x}) dx = 0$,
D'où

$$\int_0^{+\infty} x^{4k+3} e^{-x} \sin(x) dx = 0$$

En faisant le changement de variable $y = x^4$ ($x \mapsto x^4$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ vers lui même), on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} y^k \left(y^{\frac{3}{4}} e^{-y^{\frac{1}{4}}} \sin(y^{\frac{1}{4}}) \right) \left(\frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} \right) dy = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} y^k \underbrace{\left(e^{-y^{\frac{1}{4}}} \sin(y^{\frac{1}{4}}) \right)}_{=f(y)} dy = 0$$

On a f est réelle, continue sur $[0, +\infty[$ et non nulle et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} y^k f(y) dy = 0$.

Corrigé de l'exercice N° 9. Retour à l'énoncé

① D'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : x \mapsto Q_n(x) + \frac{1}{b-a} \int_a^b Q_n(t) dt$.

Il est clair que P_n est un polynôme et $\int_a^b P_n(x) dx = 0$.

Pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|P_n(x) - f(x)| \leq |Q_n(x) - f(x)| + \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b Q_n(t) dt \right| \leq \|Q_n - f\|_{\infty} + \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b Q_n(t) dt \right| = \alpha_n$$

Comme $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvu vers f sur $[a, b]$, alors $\|Q_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par le théorème d'intégration

sur un segment : $\int_a^b Q_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt = 0$.

Donc $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et α_n ne dépend pas de x , par suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvu vers f sur $[a, b]$.

② Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors g' est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g' sur $[a, b]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $P_n : x \mapsto g(a) + \int_a^x Q_n(t) dt$.

Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors pour tout $x \in [a, b]$, on peut écrire

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt$$

et on a :

$$|P_n(x) - g(x)| = \left| \int_a^x (Q_n(t) - g'(t)) dt \right| \leq (b-a) \|Q_n - g'\|_{\infty}$$

Donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvu vers g sur $[a, b]$ et comme $P'_n = Q_n$, alors on a aussi $(P'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvu vers g' sur $[a, b]$.