

Exercice 6.
 $D_a = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} a_n e^{dnx} \text{ est abscv}\}$

$$\tau_a = \inf D_a$$

1) Soit $x > \tau_a \Rightarrow \exists x_0 \in D_a$ q.
 $\tau_a \leq x_0 < x$.

$$\Rightarrow 0 \leq |a_n e^{dnx}| \leq |a_n e^{dnx_0}|$$

$$\text{or } x_0 \in D_a \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n e^{dnx_0} \text{ abscv}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n e^{dnx} \text{ est abscv.}$$

$$\forall x > \tau_a; g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{dnx}$$

e) Pro. g continue sur $\mathbb{R}_{x > \tau_a}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*; x \mapsto a_n e^{dnx}$ est continue sur $\mathbb{R}_{x > \tau_a}$

Soit $[c, d] \subset \mathbb{R}_{x > \tau_a}$

$$0 \leq |g_n(x)| \leq |a_n e^{dnx}|$$

$$\Rightarrow \sup_{[c, d]} |g_n(x)| \leq |a_n| e^{dnc}$$

$$\text{or } c > \tau_a \Rightarrow \sum_{n \geq 1} |a_n| e^{dnc} \text{ est cv}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [c, d]} |g_n(x)| \text{ cv.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} |g_n| \text{ cv} \Rightarrow \text{CW sur } [c, d]$$

Donc g est continue sur $\mathbb{R}_{x > \tau_a}$

2) $z \in \mathbb{C}$ q. $\operatorname{Re}(z) > \tau_a$

$$|a_n e^{dnz}| = |a_n e^{dn \operatorname{Re}(z)}|$$

a. $\operatorname{Re}(z) > \sigma_a \Rightarrow \sum_{n \geq 1} |a_n| e^{dn \operatorname{Re}(z)} < \infty$ C.V.

Donc $\sum_{n \geq 1} a_n e^{dnz}$ est abs. C.V.

4) Soit $x_0 > \sigma_a$; $\theta \in]0, \pi[$.

ona. $\operatorname{Re}(x_0 + r e^{i\theta}) = x_0 + \underbrace{r \cos \theta}_{> 0}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$
 $> x_0 > \sigma_a$.

D'après 3/; $\sum_{n \geq 1} a_n e^{dn(x_0 + r e^{i\theta})}$ est abs. C.V. $\Rightarrow$ C.V.

$\Rightarrow f(r, \theta)$ existe dans $\mathbb{C} \Rightarrow$ est bien d.f. sur $\{ (r, \theta) \mid r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[\}$.

b) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$: $r \mapsto f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{dn(x_0 + r e^{i\theta})}$.

Soit $f_n(r) = a_n e^{dn(x_0 + r e^{i\theta})}$, $r \geq 0$.

- $f_n \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$
- $\sum_{n \geq 1} f_n$ C. sur $\mathbb{R}_+$ (d'après 3/a)
- $f'_n(r) = -d_n e^{i\theta} a_n e^{dn(x_0 + r e^{i\theta})}$

Soit $[c, d] \subset]0, \infty[$

$$|f'_n(r)| = d_n |a_n| e^{-d_n(x_0 + r \cos \alpha)}$$

$$\leq d_n |a_n| e^{d_n(x_0 + c \cos \alpha)} = U_n$$

$$\Rightarrow \sup_{r \in [c, d]} |f'_n(r)| \leq U_n$$

$$U_n = d_n |a_n| e^{d_n(x_0 + c \cos \alpha)}$$

$$= |a_n| e^{d_n x_0} \cdot d_n e^{d_n c \cos \alpha}$$

(d_n) est croissante et non majorée

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_n e^{d_n c \cos \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow U_n = o\left(|a_n| e^{d_n x_0}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{r \in [c, d]} |f'_n(r)| < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f'_n \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}([c, d])$$

Ainsi $r \mapsto f(r, \theta)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} -d_n a_n e^{i\theta} e^{-d_n(x_0 + r \cos \alpha)}$$

c) Soit $n > 0$ $\forall q \in \mathbb{R} \mapsto f(r, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{i n (x_0 + r e^{i\theta})}$ $\forall r \in \mathbb{R}$
 Soit $g_n(\theta) = a_n e^{i n (x_0 + r e^{i\theta})}$, $r > 0$

• $n \in \mathbb{N}^*$ φ_n est continue $[-\beta, \beta]$

• $\sum_{n \geq 0} \varphi_n$ C. Sur $[-\beta, \beta]$ (d'après 4. a.)

• $\varphi_n(\theta) = -i r e^{i\theta} a_n e^{i n (x_0 + r e^{i\theta})}$

$$|f'_n(\theta)| = d_n r |a_n| e^{-d_n(x_0 + r \cos \theta)} \\ \leq r d_n |a_n| e^{-d_n(x_0 + r \cos \beta)} = v_n.$$

$$\Rightarrow \sup_{\theta \in [-\beta, \beta]} |f'_n(\theta)| \leq v_n.$$

$$v_n = r d_n |a_n| e^{-d_n(x_0 + r \cos \beta)}$$

$$= |a_n| e^{-d_n x_0} \cdot r d_n e^{-d_n r \cos \beta}.$$

$$(d_n) \text{ est croissante et non majorée} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r d_n e^{-d_n r \cos \beta} = 0.$$

$$\Rightarrow v_n = o(|a_n| e^{-d_n x_0})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-d_n x_0} < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{\theta \in [-\beta, \beta]} |f'_n(\theta)| < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f'_n < +\infty \Rightarrow C \cup \text{un } [-\beta, \beta]$$

Ainsi $\theta \mapsto f(r, \theta)$ est C^1 sur $[-\beta, \beta]$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} -i r d_n a_n e^{i\theta} e^{-d_n(x_0 + r \cos \theta)}$$

$$= i r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta).$$