

Rappel: "Série de fonctions"

C.S

$\sum_{n \geq 0} f_n \in C.S. \text{ sur } A \Leftrightarrow \text{la suite } (S_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S$
 $\Leftrightarrow \forall x \in A; \sum_{n \geq 0} f_n(x) \text{ converge.}$

* Si $\sum_{n \geq 0} f_n \in C.S. \text{ sur } A$, alors $f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

C.A:

$\sum_{n \geq 0} f_n \in C.A. \text{ sur } A \Leftrightarrow \forall x \in A; \sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\| < \infty$

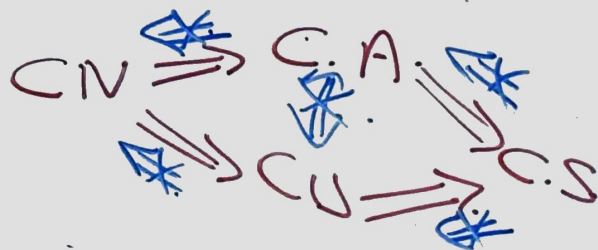
C.U:

C.N: $\sum_{n \geq 0} f_n \in C.N. \text{ sur } A \Leftrightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N; f_n \text{ est bornée sur } A$
 $\text{et } \sum_{n \geq N} \sup_{x \in A} \|f_n(x)\| < \infty$

* $\sum_{n \geq 0} f_n \in C.N. \text{ sur } A \Leftrightarrow$

$\exists (d_n) \text{ indop de } \mathbb{R} \text{ tq.}$
 $\|f_n(x)\| \leq d_n, \forall x \in A.$
 et $\sum_{n \geq 0} d_n < \infty$



$\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A \iff \text{la suite}$
 $(S_n) \subset C.W. \text{ sur } A$
 $(\Leftarrow) \text{ Sup. } \|S_n(x) - S_m(x)\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$
 $x \in A$

si $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$
 alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Th. de continuité
 si $\{k \in \mathbb{N}, f_k \text{ continue sur } A\}$
 si $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$ ou bien sur tout compact $C.A.$
 alors $S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n$ continue sur A .

$\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$
 et $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ sur A
 $\text{Sup. } \|R_n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $x \in A$

$\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$

Th. de permutation term et $\sum$
 si $\{k \in \mathbb{N}, \text{ term } f_k(x) = f_n(x) \text{ d'ordre } k\}$
 $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$ ou sur $\mathcal{D}(A)$
 alors $\sum_{n \geq 0} f_n \subset \mathcal{D}(A)$
 lim $\sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$

T.S.A. // géométrie
 Telescopique
 Comparaison série et intégrale

Th. $A = \text{intervalle de } \mathbb{R}$
 si $\{k \in \mathbb{N}, f_k \text{ est } C^k \text{ sur } A\}$
 $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$
 alors $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$
 et tout $\text{der } S$

Th.
 si $\{k \in \mathbb{N}, f_k \text{ est } C^p \text{ sur } A\}$
 $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$
 alors $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$
 et tout $\text{der } S$

Th.
 si $\{k \in \mathbb{N}, f_k \text{ continue sur } [a, b]\}$
 $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } [a, b]$
 alors $\int_a^b \sum_{n \geq 0} f_n(x) dx = \sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(x) dx$

Alors $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$
 et tout $\text{der } S$
 $S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$
 $\text{der } S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n'(x)$

Alors $\sum_{n \geq 0} f_n C.W. \text{ sur } A$
 et tout $\text{der } S$
 $S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$
 $\text{der } S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n'(x)$

$\sum_{n \geq 0} f_n$ C.S. sur $A \iff$ la suite
 $(S_n) \xrightarrow{C.U.} S$ sur A
 $(\Leftrightarrow) \sup_{x \in A} \|S_n(x) - S(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$S_i f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\downarrow$
 $C.N.$

Th. de continuité
 $\{f_n \in W, f_n \text{ continue sur } A\}$
 S_i
 Mais $S \circ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ n'est pas continue sur A .

$\sum_{n \geq 0} f_n$ C.S. sur A .
 et $R_n \xrightarrow{C.U.} 0$ sur A .
 $\sup_{x \in A} \|R_n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\sum_{n \geq 0} f_n \xrightarrow{C.U.} S$ sur A .

Th. de permutation term et $\sum$.
 $\{f_n \in W, \text{ term } f_n(x) = f_n(x) \text{ de m. t.}\}$

géométrique
 • Telescopie
 • Comparaison terme à terme

Mais pour $\sum_{n \geq 0} f_n$ de W
 lim $\sum_{n \geq 0} f_n(x) \neq \sum_{n \geq 0} \lim f_n(x)$

Th.
 $\{f_n \in W, f_n \text{ continue sur } [a, b]\}$
 Mais

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$

2.11
 12.11

179. $\xi: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est ∞ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$; $x \in \mathbb{R}^+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; f_n est ∞ sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall k \in \mathbb{N}$; $f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k \frac{1}{n^x}$.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$; $a > 1$.

$\sup_{x \in [a, b]} |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(Lnn)^k}{n^a}$ ($x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est $\downarrow$)

Or $a > 1 \Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}$ $1 < d < a$.

$\frac{n^d (Lnn)^k}{n^a} = \frac{(Lnn)^k}{n^{a-d}}$ $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$\Rightarrow \frac{(Lnn)^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^d}\right)$.

$\forall d > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d} < \infty$.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [a, b]} |f_n^{(k)}(x)| < \infty$.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n^{(k)} \in \mathcal{N} \Rightarrow \xi$ sur $[a, b]$.

Ainsi: ξ est ∞ sur $\mathbb{R}^+$.

et $\xi^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$; $x > 1$.

on déduit: ξ est convexe.

car $\xi''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^2}{n^x} \geq 0$.

Exercice 1. "Série 1".

$a_n \geq 0$ et $(a_n) \searrow$.

$\forall x \in [0, 1]; f_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

1) C.S.

Si $x \in [0, 1]$

ona. (a_n) est $\searrow$ et minuscule

donc $(a_n) \text{ CV} \Rightarrow$ bonne.

$\Rightarrow \exists N \geq 0$ q. $|a_n| \leq N$.

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n, x \in [0, 1]$

$\sum_{n \geq 0} x^n \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} n x^n (1-x) \text{ CV}$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n(x) \text{ CV}, \forall x \in [0, 1]$.

* Si $x = 1$
 $\sum_{n \geq 0} f_n(1) = 0$ par CV.
 $\sum_{n \geq 0} f_n(1) \text{ CV}$.

$\Rightarrow \forall x \in [0, 1]; \sum_{n \geq 1} f_n(x) \text{ CV}$.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n \text{ C.S. sur } [0, 1]$.

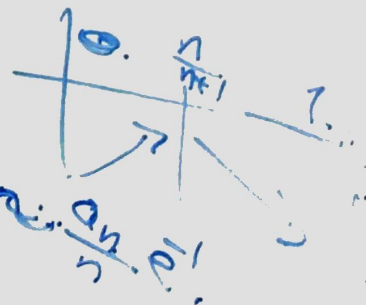
2) Pq. $\sum_{n \geq 1} f_n \text{ C.N. sur } [0, 1] \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \text{ CV}$.

$|f_n'(x)| = a_n x^{n-1} (1-x); \forall x \in [0, 1].$
 $= f_n(x).$

f_n est dérivable sur $[0, 1]$.

$f_n'(x) = a_n x^{n-1} (n - (n+1)x)$
 $= 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{n}{n+1}.$

IV.
 $\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f_n'(x)| = a_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n+1}$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n'(x)| \text{ CV} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \text{ CV}$



$$3) \text{ Rq. } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} C_n \in \text{un } [0,1] \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

" $\Rightarrow$ " ora. $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ven. t.

$$\text{et } (a_n) \downarrow \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}; a_n \geq \ell.$$

$$\Rightarrow a_n x^n (1-x) \geq \ell x^n (1-x), \forall x \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k (1-x) \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \ell x^k (1-x)$$

$$R_n(x)$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |R_n(x)|$$

$$\geq \ell \sup_{x \in [0,1]} x^{n+1} (1-x) = \ell \cdot \sup_{x \in [0,1]} x^{n+1} (1-x)$$

$$\text{Parigo } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} C_n \in \text{un } [0,1] \Rightarrow C_n \in \text{un } [0,1]$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \ell = 0$$

" $\Leftarrow$ " hyp. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{Rq. } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} C_n \in \text{un } [0,1]$$

$$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k (1-x)$$

$$\leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k (1-x)$$

$$\leq a_{n+1} x^{n+1} \forall x \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |R_n(x)| \leq a_{n+1}$$

$$\text{II. } R_n(1) = 0$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |R_n(x)| \leq a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ un } [0,1]$$

Exercice 3

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}; x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), x \in \mathbb{R}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}; x \mapsto f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*.$

$$f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x}$$

$$\text{or } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n(x) < \infty.$$

Si $x=0$; $f_n(0)=0$, then $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n(0) < \infty$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 0} f_n(x) < \infty$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}; -x \in \mathbb{R}.$

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(-x) = - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = -f(x)$$

$\Rightarrow f$ est impaire.

2) $\forall q, f$ continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $]0, \infty[$.

Soit $[a, b] \subset]0, \infty[(a > 0)$

$$|f_n(x)| \leq \frac{b}{1+n^2 a^2}, \forall x \in [a, b].$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| \leq \frac{b}{1+n^2 a^2}$$

$$\text{or } \sum_{n \geq 1} \frac{b}{1+n^2 a^2} < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n < \infty$$

Donc f est continue sur $]0, \infty[$.

et on a fort un p.u.v., alors fort continu.

$$] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$$

3) Soit $x \geq 0$.

$$\text{Soit } g(t) = \frac{x}{1+t^2 x^2}; \quad t \in [0, +\infty[$$

g est décroissante sur $[0, +\infty[$.

$$\forall t \in [n, n+1], \quad g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$$

$$\therefore \sum_{n \geq 0} g(n) = \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+1} g(t) dt \leq \sum_{n \geq 0} g(n)$$

g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

$$\text{Alors } \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \leq \int_0^{\infty} g(t) dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} g(n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{1+n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}; \quad \forall x > 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Supp. } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.U. sur }]0, +\infty[$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$$

$$\text{D'après (3) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{absolu} \\ \text{Dici} \end{array} \right.$$

$$\text{Dici } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.U. sur }]0, +\infty[$$

Rq.ue.

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \geq 0$$

$$\geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{1+k^2 x^2}$$

$$\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{1+(2n)^2 x^2} \quad k \leq 2n$$

$$R_n(x) \geq \frac{nx}{1+(2n)^2 x^2}$$

$$\exists x_n = \frac{1}{2n} \in]0, \alpha[$$

$$R_n\left(\frac{1}{2n}\right) \geq \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow R_n\left(\frac{1}{2n}\right) \not\rightarrow 0$$

$$\Rightarrow P_n \not\rightarrow 0 \text{ sur }]0, \alpha[$$

Exercice 4

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$$

$$P_q D_f = [0, +\infty[$$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x < 0, \left| \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n(x) \text{ div.}$$

• Si $x \geq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est alterné.

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n}$$

$$(e^{-nx}) \text{ est } \downarrow \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\left(\frac{1}{n}\right) \text{ est } \downarrow \Rightarrow \left(\frac{e^{-nx}}{n}\right) \text{ est } \downarrow$$

I.S.A.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ C.V. } \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow D_f = [0, \infty[.$$

e) Rq. f continue sur $[0, \infty[$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, \infty[$.

- $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ vérifie T.S.A.

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{e^{(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}, \forall x \geq 0$$

$$\sup_{x \in [0, \infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow R_n \xrightarrow{U} 0 \text{ sur } [0, \infty[.$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n \subset U \text{ sur } [0, \infty[.$$

Donc f est continue sur $[0, \infty[$.

3) Rq. f est C^1 sur $[0, \infty[$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est C^1 sur $[0, \infty[$.

- $\sum_{n \geq 1} f_n' \subset U$ sur $[0, \infty[$.

$$f_n'(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}.$$

- Soit $[a, b] \subset [0, \infty[$ ($a > 0$)

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n'(x)| = e^{-na}$$

$$a > 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} e^{-na} < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [a, b]} |f_n'(x)| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n' \subset U \Rightarrow C \text{ sur } [a, b]$$

Donc f est C^1 sur $[0, \infty[$.

$$\text{et } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-x})^n$$

$$= - \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \forall x > 0$$

$$4.) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \\ \bullet \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converges} \end{array} \right.$$

Doi: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

$$5.) \text{ona } f'(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = -\ln(1+e^{-x}) + c_0, \forall x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c_0 \Rightarrow c_0 = 0$$

!!

$$\Rightarrow f(x) = -\ln(1+e^{-x}), \forall x > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ est continue sur } [0, \infty[\\ \bullet -\ln(1+e^{-x}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f(x) = -\ln(1+e^{-x}), \forall x > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x) = 0, \forall x > 0 \\ h \text{ continue sur } [0, \infty[\end{array} \right\} \Rightarrow h(x) = 0, \forall x \geq 0$$

ou direct

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$