

Rappel: "Suite de fonctions"

C.S. $(f_n: A \subset E \rightarrow F)$

$f_n \xrightarrow{C.S.} f \text{ sur } A \Leftrightarrow$

$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq n_0, \|f_n(x) - f(x)\|_F < \epsilon.$

C.U

$f_n \xrightarrow{C.U.} f \text{ sur } A.$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq n_0, \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|_F < \epsilon.$

C.U $\Rightarrow$ C.S

$f_n \xrightarrow{C.U.} f \text{ sur } A \Leftrightarrow$
 $\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq n_0, f_n \text{ est bornée}$
 et $\sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$f_n \xrightarrow{C.U.} f \text{ sur } A \Leftrightarrow \exists (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ s.t.}$
 $\text{s.t. } \begin{cases} \|f_n(x) - f(x)\| \leq d_n, \forall x \in A \\ d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$

Si $\exists x_0 \in A \text{ s.t. } \|f_n(x_0) - f(x_0)\| \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{C.U.} f \text{ sur } A.$

Th. de continuité

$\{ \cdot \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } A \cdot$
Si $\left\{ \begin{array}{l} \cdot f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } A \text{ ou bien} \\ \cdot \text{ tout compact } C \subset A \end{array} \right.$
Alors f est continue sur A .

Th. de double limite

$f_n: A \subset E \rightarrow F, a \in A$
Si $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n \text{ existe dans } F \\ \cdot f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } A \text{ ou bien} \end{array} \right.$
Alors $\left\{ \begin{array}{l} \cdot (l_n) \subset V \\ \cdot \text{ sur un } U(a) \end{array} \right.$
et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$

$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

Th. de dérivabilité $A = I \subset \mathbb{R}$

$\{ \cdot \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est } C^1 \text{ sur } I \cdot$
Si $\left\{ \begin{array}{l} \cdot f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } I \\ \cdot f'_n \xrightarrow{CU} g \text{ sur } I \text{ ou bien tout } \text{seg} \subset I \end{array} \right.$
Alors $\left\{ \begin{array}{l} \cdot f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur tout } \text{seg} \subset I \\ \cdot f \text{ est } C^1 \text{ sur } I \end{array} \right.$
et $f'_n \xrightarrow{CU} g$ sur I .

$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f''_n(x)$ sur I

Th. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Si $\begin{cases} \cdot \forall n \in \mathbb{N}; f_n \text{ est } C^p \text{ sur } I \\ \cdot f_n \xrightarrow{C^p} f \text{ sur } I \\ \cdot \text{Hölder } p-1; f_n \xrightarrow{C^{p-1}} g \text{ sur } I \end{cases}$

Alors $\begin{cases} \cdot f_n \xrightarrow{C^p} g \text{ sur } I \text{ ou bien} \\ \cdot \text{Hölder } p; f_n \xrightarrow{C^p} g \text{ sur tout } \text{reg } C^p I \end{cases}$

f est C^p sur I

et $\forall k \leq p$, $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(k)}(x)$$

Th. $\forall n \in \mathbb{N}; f_n$ est continue sur $[a, b]$
 Si $\begin{cases} \cdot f_n \xrightarrow{C^0} f \text{ sur } [a, b] \end{cases}$
 Alors f est continue sur $[a, b]$
 et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

* Si $f_n \xrightarrow{C^0} f \text{ sur } A \Rightarrow f_n \xrightarrow{C^0} f \text{ sur } B$
 * Si $\begin{cases} \cdot f_n \xrightarrow{C^0} f \text{ sur } A \\ \cdot g \text{ est bornée à valeurs réelles} \end{cases} \Rightarrow g \cdot f_n \xrightarrow{C^0} g \cdot f \text{ sur } A$

Exer.

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1]$$

$$f_n \xrightarrow{C.S.} f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

• Vérif. f_n continue sur $[0,1]$.

$$f_n \xrightarrow{C.S.} f \text{ sur } [0,1]$$

Req f n'est pas continue sur $[0,1]$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{C.U.} \text{ sur } [0,1].$$

$$\bullet \text{ sur } [0,1], f_n \xrightarrow{C.S.} 0.$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = 1 \neq 0$$

$$\bullet \text{ Sur } [0, \frac{1}{n}]$$

$$\sup_{x \in [0, \frac{1}{n}]} |f_n(x) - 0| = \left(\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Exercice 1 "Série 2"

$$f_n(x) = n^{\alpha} x^n (1-x), \quad x \in [0,1]$$

C.S.

Soit $x \in]0,1[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} x^n (1-x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} e^{n \ln x} (1-x) \stackrel{<0}{\rightarrow} 0$$

Si $x=0$ ou $x=1$, $f_n(x)=0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{C.S.} 0 \text{ sur } [0,1].$$

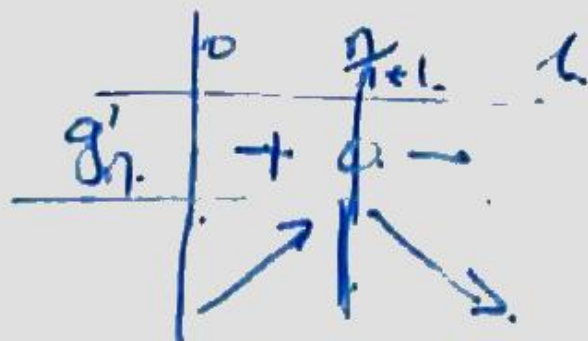
C.U.

$$\text{Soit } g_n(x) = |f_n(x) - 0| = f_n(x).$$

g_n est dérivable sur $[0,1]$.

$$g'_n(x) = n^{\alpha} x^{n-1} (1-x) - n^{\alpha} x^n = n^{\alpha} x^{n-1} (1-2x)$$

$$g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$



Th. de dérivabilité

- $f_n \in W_1$, f_n est
- $f_n \subset S \rightarrow f_n$
- $f_n \subset U \rightarrow g_n$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} f_n \subset U \\ f_n \subset S \end{array} \right.$

T.V.

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} g_n(x) = g_n(1)$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = n^\alpha \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n-1} \frac{1}{n+1}$$

$$\sim \frac{n^\alpha}{n} = \frac{1}{n} \left(\cos \left(\frac{n}{n+1} \right) \right) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \subset U \rightarrow 0 \text{ sur } [0,1]$$

$\Rightarrow$ $g_n \rightarrow 0$
 $\Rightarrow$ $g_n \rightarrow 0$

Exercise 2:

$$f_n(x) = \arctan(nx), x \in \mathbb{R}.$$

1) C.S.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

2) C.U. $\rightarrow$ $\lim \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; f_n is continuous on $\mathbb{R}$.
 $\Rightarrow f$ is not continuous on $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f_n \not\rightarrow f \text{ in } \mathbb{R}.$$

3) C.U. $\rightarrow$ $\lim \mathbb{C}$.

$$f_n \rightarrow f = \frac{\pi}{2} \text{ in } \mathbb{C}.$$

$$\exists x_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{C}.$$

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \arctan(1 - \frac{\pi}{2}) \rightarrow -\frac{\pi}{4} \neq 0.$$

$$\Rightarrow f_n \not\rightarrow f \text{ in } \mathbb{C}.$$

Conclusion:

$$\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}; \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(nx) = 0. \exists \lim \\ \text{Supp quo. } f_n \rightarrow f \text{ in } \mathbb{C} \end{array}$$

$$\text{Alon. } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$$

absolute

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$

$0 = 0$

$0 = 0$

Exercício 1 "Serie I".

$$2) f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n, & x \in [0, n] \\ 0, & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

C.S

Seja $x \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ (fixo)

$f_n(x) = ?$ para n muito grande.



$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0, \quad x \leq n$$

$$\Rightarrow n \geq n_0, \quad f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x}$$

$$1) c) f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2n^2(x - \frac{1}{n}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

C.S

Seja $x \in]0, \infty[$ (fixo)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0, \quad \frac{1}{n} < x$$

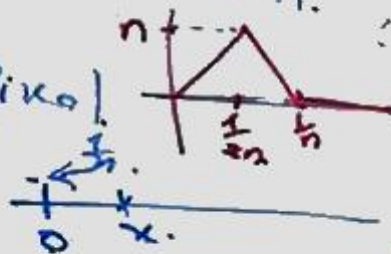
$$\Rightarrow n \geq n_0, \quad f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{si } x = 0, \quad f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{C.S} 0 \text{ em } [0, \infty[$$

$$\text{Seja } x_n = \frac{1}{2n} \in [0, \frac{1}{2n}]$$

$$f_n(x_n) = f_n(\frac{1}{2n}) = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$



$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [0, \infty[.$$

ou bien

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Exercice 2.

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in [-1, 1].$$

1) C.S. $f_n \xrightarrow{C.S.} \sqrt{x^2} = |x|$

a) $|f_n'(x) - f'(x)| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - \frac{x}{|x|} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - \frac{x}{x} \right|, \quad \forall x \in [-1, 1].$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n'(x) - f'(x)| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{C.S.} f \text{ sur } [-1, 1].$$

3) Soit $f_n \in C^1$ sur $[1,1]$
 $f_n \xrightarrow{C^1} f$ sur $[1,1]$
 Supp $f_n \xrightarrow{C^1} g$ sur $[1,1]$

Alors $f \in C^1$ sur $[1,1]$

ix) absurde
 Soit $f_n \xrightarrow{C^1} f$ sur $[1,1]$.

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$$

Rappel: "Théorème de Weierstrass".

Soit $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors $\exists (P_n)$ suite de fonctions polynomiales tq $P_n \xrightarrow{C^0} f$ sur $[a,b]$
 $\|P_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

on note $C([a,b], \mathbb{R}) = \{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$
 $P([a,b], \mathbb{R}) = \{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ polynomiale}\}$
 $\overline{P([a,b], \mathbb{R})} = C([a,b], \mathbb{R})$

Alors

App.

Tq $\forall f \in C([a,b], \mathbb{R})$, $d(f, P([a,b], \mathbb{R})) = 0$
 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists P \in P([a,b], \mathbb{R})$

Rép soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Théorème de Weierstrass $\exists (P_n) \subset \mathcal{P}([a, b], \mathbb{R})$

1. $\|P_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2. $0 \leq d(f, \mathcal{P}([a, b], \mathbb{R})) \leq \|P_n - f\|_{\infty}$

$\Rightarrow d(f, \mathcal{P}([a, b], \mathbb{R})) = 0$.

Exercice 11 "Série II".

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$|P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$ pour $n, m \geq N$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N, |P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$.

2) $\forall n \geq N: |P_n(x) - P_N(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \underbrace{P_n - P_N}_{\text{poly}} \text{ est bornée } \Rightarrow$

$$P_n - P_N = c_0 = P_n(0) - P_N(0)$$

3) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(0) - P_N(0) + P_N(x)$

$\Rightarrow f(x) = f(0) - P_N(0) + P_N(x)$
 $\Rightarrow f$ est une fonction polynomiale.

4) $P_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
 $\xrightarrow{\text{C.S.}} e^x = f(x) \text{ sur } \mathbb{R}.$

Supp $f_n \xrightarrow{\text{C.S.}} e^x \text{ sur } \mathbb{R}.$

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n =$ fonction polynomiale

D'après 2/ f est polynomiale absolue.

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Si: $I = [a, b]$

C^0
+ Continuity

I univertuelle 909

I.C.D.

- Si
- $n \in \mathbb{N}$; $f_n \in C^0, \text{ mes } I$
 - $f_n \xrightarrow{C^0} f, \text{ mes } I$
 - $f \in C^0, \text{ mes } I$
 - $\exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_+, C^0$ positive et continu sur I
- Alors
- f_n est intégrable sur I
 - f est intégrable sur I ($|f(x)| \leq \varphi(x)$)

$\forall n \in \mathbb{N}$
 $\forall x \in I$ $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$

Alors

• f_n est intégrable sur I

• f est intégrable sur I ($|f(x)| \leq \varphi(x)$)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$

Exercice 3. "Série I"

$$b_n = \int_0^{\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ??$$

Soit $f_n(x) = \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x(1+x^2)}$, $x \in]0, \infty[$.
 $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est C.P.M. $]0, \infty[$.

- f_n C.S. $\rightarrow \frac{1}{1+x^2} = f(x)$ M. $]0, \infty[$.
- f est C.P.M. $]0, \infty[$.

- $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = f(x) \left(\left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{x}{n} \right)$
 f est C.P.M. $]0, \infty[$ et intégrable.

Alors d'après T.C.D

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

$$= \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$n \neq \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n dx.$$

$f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n$, $x \in]0, \infty[$.
 f_n est C.P.M. $]0, \infty[$.

- f_n C.S. $\rightarrow 0$ M. $]0, \infty[$ $\left(\left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1 \right)$.
- 0 est C.P.M. $]0, \infty[$.

• On a $\left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1$.

$\Rightarrow \forall n \geq 2; \left| \frac{\sin x}{x} \right|^n \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|^2 = \varphi(x), \forall x > 0$

φ est C.P., $\oplus$ et intégrable sur $]0, \infty[$

Car :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1 \\ |\varphi(x)| \leq \frac{1}{x^2} \text{ au } 0(\infty) \end{cases}$$

T.C.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^n du = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^n du = 0$

ou bien

$$\begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|^n \leq 1, \forall x \in]0, 1] \\ \left| \frac{\sin x}{x} \right|^n \leq \frac{1}{x^n}, \forall x \in]1, \infty[\end{cases}$$

$\Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{x^n} & \text{si } x \in]1, \infty[\end{cases}$