

Les theoremes d'approximation:

Th1

Soit $f: [a, b] \rightarrow F$. $C[1]$

il existe une suite de fonctions
en escalier (φ_n) $\varphi_n \subset U \rightarrow f$ sur $[a, b]$.

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \|\varphi_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq n_0, \|\varphi_n - f\| < \varepsilon.$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \text{ en escalier s.t. } \|\varphi - f\| < \varepsilon.$

$$\Leftrightarrow \overline{C([a, b], F)} = C([a, b], F)$$

"
ensemble des fonctions
en escalier

$$\overline{A} = E \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in E, \exists (x_n) \subset A \text{ s.t. } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

App.

1) $\forall f \in C[1]$ sur $[a, b]$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(n(x-a)) dx = 0$$

2) Rq. Si φ en escalier sur $[a, b]$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin(n(x-a)) dx = 0$$

The "Weierstrass"

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Continue.

il existe (P_n) suite de fonctions polynomiales

$$q \cdot P_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [a, b].$$

$$\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ q.t.m. $n \geq n_0, \|P_n - f\|_\infty < \varepsilon.$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists (P_\varepsilon)$ fonction pol. q. $\|P_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon.$

$$\Rightarrow \overline{f([a, b], \mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\infty} = C([a, b], \mathbb{R}).$$

"fermeture des fonctions polynomiales".

Prop.

$$P_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [a, b]$$

$$\Rightarrow P_n \rightarrow f \text{ pour } \|\cdot\|_1.$$

$$P_n \rightarrow f \text{ pour } \|\cdot\|_2.$$

Car

$$\|P_n - f\|_1 = \int_a^b |P_n(x) - f(x)| dx.$$

$$\leq (b-a) \|P_n - f\|_\infty.$$

$$\|P_n - f\|_2 = \left(\int_a^b |P_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

$$\leq \|P_n - f\|_\infty \cdot \sqrt{b-a}.$$

Problème

Partie II

App 1

$$f: [a, b] \rightarrow K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Alors } \forall P \in K[x], P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$\Rightarrow \int_a^b P(t) f(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b t^k f(t) dt = 0$$

$$\Rightarrow \forall P \in K[x], \int_a^b P(t) f(t) dt = 0$$

f continue sur $[a, b]$, d'après th de Weierstrass
 $\exists (P_n)$ suite de fonctions polynômes

$$P_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [a, b]$$

ou f est continue sur $[a, b] \Rightarrow$ bornée

$$P_n \cdot f \xrightarrow{CU} f \cdot f$$

et $P_n \cdot f$ continue sur $[a, b]$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b P_n f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} P_n f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} P_n f(x) dx = 0 = \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0 \Rightarrow f = 0$$

App 2. $E = C([a, b], \mathbb{R})$

1) $\forall f, g \in E, d(f, g) = 0, \forall f \in E$

$\forall f \in E: f \text{ continuous on } [a, b]$

Thm. Weierstrass $\exists (P_n)$ such that functions
polynomials $(\in P)$ by $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ pointwise

$0 \leq d(f, P) \leq \|P_n - f\|_\infty \Rightarrow d(f, P) = 0$

2) $u \in E$
 $D(u) = \{f \in P \mid d(u, P) = \|u - 0\|_\infty\}$

$d(u, P) = 0 \Leftrightarrow u \in P$

si $u \in P$, $d(u, P) = 0$

$f \in D(u) \Leftrightarrow \|u - f\|_2 = 0$
 $\Leftrightarrow u = f$

$\Rightarrow D(u) = \{u\}$

si $u \notin P$ $\Rightarrow d(u, P) = 0$
 $\underline{u \in P} \Rightarrow d(u, P) = 0$

$f \in D(u) \Leftrightarrow u = f \in P$
 $\Rightarrow D(u) = \emptyset$

App $\Rightarrow$
 $K = \{g \in C([0,1], \mathbb{R}) ; \|g\| = 0\}$
 $= \ker \varphi$ avec $\varphi : C([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 φ linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow \varphi$ fonc linéaire

$g = 1 \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi(g) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \varphi \neq 0$

$\Rightarrow K$ est un hyperplan...

De plus on a

$\begin{cases} |\varphi(f)| = |g(0)| \leq \|g\|_\infty \\ \varphi \text{ est linéaire} \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi$ continu

$\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$
 $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \ker \varphi$ est un fermé de $C([0,1], \mathbb{R})$

Rq si $f : E \rightarrow F$ linéaire et continu
 Alors $\ker f$ est un fermé

$$P_0 = F \cap P = \{ f \in F \mid f(0) = 0 \}$$

2/a) Weierstrass ..

$$P_n \xrightarrow[\text{C.U.}]{\text{C.U.}} g \quad (g \in F) \Rightarrow g(0) = 0$$

$$b) \quad \Phi_n = P_n - P_n(0).$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

$$|\Phi_n(x) - g(x)| = |P_n(x) - g(x) - P_n(0)|$$

$$= |P_n(x) - g(x) - (P_n(0) - g(0))|$$

$$\leq |P_n(x) - g(x)| + |P_n(0) - g(0)|$$

$$\leq \|P_n - g\|$$

$$\Rightarrow \| \Phi_n - g \| \leq \| P_n - g \|$$

$$\Rightarrow \Phi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g \text{ unif.}$$

* Rq. $\overline{P_0} = \mathbb{R}$.

ma $P_0 \subset \mathbb{R} \Rightarrow \overline{P_0} \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \text{ (par)}$

">" soit $g \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \varphi_n \in P_0$

q. $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$ p.u. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow g \in \overline{P_0} \Rightarrow \mathbb{R} \subset \overline{P_0}$

Donc $\overline{P_0} = \mathbb{R}$.

* $h \in C(\mathbb{R}^+)$ et $g(t) = h(-\ln t)$, $t \in]0,1[$

g est continue

$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$

on pose $g(0) = 0$

$\Rightarrow g \in \mathbb{R}$

$\|g\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |g(t)| = \sup_{t \in]0,1[} |g(t)|$
 $g(0) = 0$

$= \sup_{t \in]0,1[} |h(-\ln t)|$

$= \sup_{x \in [0, \infty[} |h(x)|$

$= N_\infty(h)$

$t \mapsto -\ln t$ est
 bij. de $]0,1[$
 sur $[0, \infty[$

4) on a $g \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (\varphi_n) \in P_0$ q.
 $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$ sur $[0,1]$.

$\sup_{t \in [0,1]} |\varphi_n(t) - g(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\sup_{t \in [0,1]} |\varphi_n(t) - h(-\ln t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$= \sup_{x \in [0, \infty)} |\Phi_n(\bar{e}^x) - h(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$= \sup_{x \in [0, \infty)} |\bar{e}^x \cdot P_n(\bar{e}^x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Phi_n(0) = 0 \Rightarrow \Phi_n(x) = x \cdot P_n(x)$$

Partie I

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}; \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

f Continue sur $[0,1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$1) f(x) = 1 \rightarrow B_n(f)(x) = \underline{1}$$

$$f(x) = x \rightarrow B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}$$

$$\Rightarrow B_n(f)(x) = x$$

$$* f(x) = x(1-x) \rightarrow B_n(f)(x) = \frac{n-1}{n} x(1-x)$$

3/a) f Continue sur $[0,1]$

alors f est unif Continue sur $[0,1]$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [0,1] \text{ q. } |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

$$4) A = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \alpha \right\}$$

$$B = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| > \alpha \right\}$$

$$\text{Pg. } B_n(f) \subset U \rightarrow f \text{ sur } [0,1]$$

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$\leq \sum_{k \in A} C_n^k |f(\frac{k}{n}) - f(x)| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in B} \dots$$

$$k \in A \Rightarrow |x - \frac{k}{n}| \leq \alpha \Rightarrow |f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \cdot \sum_{k \in A} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in B} \dots$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^n \dots + \sum_{k \in B} \dots$$

$$\forall k \in B; |x - \frac{k}{n}| > \alpha \Rightarrow (nx - k)^e > \alpha^e n^e$$

$$\Rightarrow \frac{(nx - k)^e}{n^e \alpha^e} > 1$$

• f est continue sur $[0,1] \Rightarrow f$ est bornée par []

$$\Rightarrow \sum_{k \in B} C_n^k |f(\frac{k}{n}) - f(x)| x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in B} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \cdot \dots$$

$$\leq \dots \sum_{k \in B} \frac{(nx - k)^e}{n^e \alpha^e} x^k (1-x)^{n-k} \dots$$

$$\leq \frac{2\pi}{n^2 d^2} \sum_{k=0}^n C_n^k (nx-k)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{2\pi}{n^2 d^2} n x(1-x)$$

$$\sum_B \leq \frac{2\pi}{n d^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n d^2} = 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq n_0,$$

$$\frac{2\pi}{n d^2} < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq n_0,$$

$$|B_n(p)(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow B_n(p) \subset U \rightarrow f \text{ on } [0,1]$$

$$\text{Soln } g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Continuous}$$

$$x \in [a,b] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1] \text{ s.t. } x = ta + (1-t)b$$

$$t = \frac{x+b}{a-b}$$

$$\text{Soln } f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(t) = g(x) = g(ta + (1-t)b)$$

$$g \text{ continuous on } [0,1] \Rightarrow f \text{ continuous on } [0,1]$$

$$\text{approx. by } \exists (P_n) \text{ with } P_n \text{ polynomial}$$

$$P_n \subset U \rightarrow f \text{ on } [0,1]$$

$$\sup_{t \in [0,1]} |P_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{x \in [a,b]} |P_n(\frac{x+b}{a-b}) - g(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Exercice 4.

e) b) si $t \in [n, \infty[$, $f_n(t) = 0 \leq t^{n-1} e^{-t}$

si $t \in]0, n[\Rightarrow \frac{t}{n} < 1 \Rightarrow -\frac{t}{n} > -1$

$$0 \leq f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n t^{n-1} = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} t^{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_n(t) \leq e^{n(-\frac{t}{n})} t^{n-1}$$

d) $f_n \leq f$ $\Rightarrow f: t \mapsto e^{-t} t^{n-1}$ $t^{n-1} = e^{-t} t^{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{n-1} dt = \Gamma(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) dt$$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est C.P.M. sur $]0, \infty[$.

• $f_n \leq f \Rightarrow f$ m. sur $]0, \infty[$.

• $f \in \mathcal{P} \cap \text{m. sur }]0, \infty[$.

• $|f_n(t)| \leq f(t)$, $\forall t \in]0, \infty[$.

f est C.P., $\oplus$ et intégrable sur $]0, \infty[$.

T.C.D $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) dt = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 - \frac{t}{n})^n t^{n-1} dt = \Gamma(n)$

3/a) Récurrence.

Pq $\forall n \in \mathbb{N}$; $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$, $\forall x > 0$.

Pour $n=0$; $I_0(x) = \frac{1}{x}$ vérif?

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$, $\forall x > 0$.

Pq $I_{n+1}(x) =$

$I_{n+1}(x) = \int_0^1 (1-u)^{n+1} u^{x-1} du.$

IPP $f: (1-u)^{n+1}.$

$f' = -(n+1)(1-u)^n.$

$g' = u^{x-1}.$

$g = \frac{1}{x} u^x.$

$\lim_{u \rightarrow 0} (f \cdot g)(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1-u)^{n+1} u^x}{x} = 0$

$(f \cdot g)(1) = 0$

$u \rightarrow (1-u)^{n+1} u^{x-1}$ est C-PP sur $[0,1]$ et intégrable car $\sim u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$ ($x > 0$ $\Rightarrow 1-x < 1$)

Alors $I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} \int_0^1 (1-u)^n u^x du.$

$= \frac{n+1}{x} I_n(x+1)$

$= \frac{(n+1)!}{x(x+1)\dots(x+n+1)}$