

Intégrale à paramètre

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions définies par intégrale dépendant d'un paramètre. On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Cas d'un intervalle quelconque

Dans cette partie, on considère I un intervalle non vide quelconque de $\mathbb{R}$ et A une partie d'un e.v.n de dimension finie.

$$\begin{aligned} f : A \times I &\longrightarrow IK = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x, t) &\longmapsto f(x, t) \end{aligned}$$

1.1 Limite

Théorème 1.1 "Extension du T.C.D."

Soit $(f_\lambda : I \longrightarrow IK)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions continues par morceaux et $a \in \bar{J}$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall \lambda \in J, f_\lambda \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet \forall t \in I, \lim_{\lambda \rightarrow a} f_\lambda(t) = f(t) \\ \bullet f \text{ est continue par morceaux sur } I. \end{array} \right.$

$\bullet$ Il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall \lambda \in J, (\text{ou } \forall \lambda \in v(a)) \quad |f_\lambda(x)| \leq \varphi(x), \forall x \in I$.

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall \lambda \in J, f_\lambda \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet f \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \lim_{\lambda \rightarrow a} \int_I f_\lambda(x) dx = \int_I \lim_{\lambda \rightarrow a} f_\lambda(x) dx = \int_I f(x) dx \end{array} \right.$

Exemple 1.1 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} dt = 0$

Calcul de limite par comparaison

Exemple 1.2 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = 0$.

1.2 Continuité

Définition 1.1 * On dit que f vérifie l'hypothèse de domination **(H.D)** s'il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I vérifiant $\forall x \in A, |f(x, t)| \leq \varphi(t), \forall t \in I$.

* On dit que f vérifie l'hypothèse de domination locale **(H.D.L)** si pour tout segment $K = [a, b] \subset A$ il existe une fonction $\varphi_K : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I vérifiant $\forall x \in K, |f(x, t)| \leq \varphi_K(t) \forall t \in I$.

Théorème 1.2 de Continuité.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \cdot \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est continue sur } A \\ \cdot f \text{ vérifie l' (H.D) ou bien l' (H.D.L)} \end{array} \right.$

alors l'application $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Exemple 1.3 Montrer que la fonction $G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Exemple 1.4 "Transformée de Laplace"

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt, \forall x > 0$.

1) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est définie continue sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

3) On suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l \neq 0$. Montrer que alors $\mathcal{L}(f)(x) \sim \frac{l}{x}$

Théorème 1.3 de dérivation.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ est continue par morceaux et intégrable sur } A \\ \bullet \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } A \\ \bullet \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est continue par morceaux} \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial x} \text{ vérifie l' (H.D) ou bien l' (H.D.L)} \end{array} \right.$$

alors l'application $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur A et

$$\forall x \in A \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Exercice 1.1 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$.

1) a) Montrer que F est bien défini sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

2) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3) Calculer $F'(x)$ puis déduire l'expression de F sur $]0, +\infty[$.

Réponse

Exercice 1.2 1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

3. Déduire l'expression de f .

Corollaire 1.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$Si \left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^n \text{ sur } A \\ \bullet \forall 0 \leq k \leq n-1, \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \text{ est continue par morceaux et intégrable sur } I \\ \bullet \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \text{ est CM sur } I \\ \bullet \text{La fonction } \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \text{ vérifie l' (H.D) ou bien l' (H.D.L)} \end{array} \right.$$

alors l'application $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^n sur A et

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \forall x \in A \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

Corollaire 1.2 .

$$Si \left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } A \\ \bullet \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \text{ est continue par morceaux} \\ \bullet \forall n \in \mathbb{N}, \text{La fonction } \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \text{ vérifie l' (H.D) ou bien l' (H.D.L)} \end{array} \right.$$

alors l'application $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^∞ sur A et

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \forall x \in A \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

Exercice 1.3 "Transformer de Fourier"

Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt.$$

La fonction $\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f .

- 1) Montrer que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Montrer que $\hat{f}$ est bornée.
b) Montrer que si f est continue, alors $\hat{f}$ est continue.
- 3) Soit f une fonction continue et $n \in \mathbb{N}$, montrer que si $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est C^n sur $\mathbb{R}$.
- 4) On considère l'espace vectoriel $L_c^1(\mathbb{R}) = \{f \text{ continue et intégrable sur } \mathbb{R}\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ avec

$$\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$$

et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

On pose

$$\varphi : \begin{array}{l} (L_c^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathcal{B}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array}$$

Montrer que φ est continue.

- 5) Soit $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.
- a) Justifier que $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle $y' + xy = 0$.
- b) Dédurre l'expression de $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}$. (On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 1.4 "Fonction Gamma d'Euler"

On rappelle que la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ssi $x > 0$. On définit, ainsi la fonction Gamma d'Euler par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad \forall x > 0.$$

Montrer les résultats suivants :

- 1) La fonction Γ est de classe C^∞
 - 2) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
 - 3) $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$.
 - 4) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
 - 5) Montrer que Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.
 - 6) Montrer que Γ' s'annule une et une seule fois en un point $\alpha \in]1, 2[$. En déduire les variations de Γ sur $]0, +\infty[$.
 - 7) Montrer que a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\Gamma(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
- b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$.
- c) Donner l'allure de la courbe de Γ

Exercice 1.5 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 t^x (1-t)^x dt.$$

- 1) Montrer que le domaine de définition le domaine de f est $]-1, +\infty[$.
- 2) Montrer que f est continue sur son domaine
- 3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $f(n) > 0$.
b) Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 4) a) Vérifier que $\forall t \in [0, 1] \ t(1-t) \leq \frac{1}{4}$.
b) Déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
1. a) Justifier que f est décroissante.
b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

2 Cas d'un segment

Dans cette partie, on considère une fonction

$$\begin{aligned} f : A \times [a, b] &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f(x, t) \end{aligned}$$

Théorème 2.1 *de continuité.*

Si $(x, t) \longmapsto f(x, t)$ est continue sur $A \times [a, b]$,

$$F : A \longrightarrow E$$

alors $x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur A .

Exemples

La fonction $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+t)e^{tx} dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2 *de dérivation.*

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (x, t) \longmapsto f(x, t) \text{ est continue sur } A \times [a, b] \\ \bullet \forall t \in [a, b], x \longmapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } A \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet (x, t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est continue sur } A \times [a, b] \end{array} \right.$

alors l'application F est de classe C^1 sur A et

$$\forall x \in A, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Exercice

Soit, pour $x > 0$: $h(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$.

(1) Montrer h est de classe C^1 sur et donner sa la monotonie.

(2) Montrer $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$.

(3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (h(x) + \ln x - \ln(x+1))$ existe et finie.

(4) Dédire que $h(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$

Réponse

Corollaire 2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$Si \left\{ \begin{array}{l} \bullet (x, t) \mapsto f(x, t) \text{ est continue sur } A \times [a, b] \\ \bullet \forall t \in [a, b], x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^n \text{ sur } A \\ \bullet \forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \text{ existe et continue sur } A \times [a, b] \end{array} \right.$$

$$\text{alors } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ l'application } F \text{ est de classe } C^n \text{ sur } A \\ \bullet \forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in A, F^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt. \end{array} \right.$$

Exercice "Calcul de l'intégrale de Gauss"

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

2) Montrer que $x \mapsto f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$ est constante .

3) Dédire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Théorème 2.3 de Fubini.

Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x, t) dx dt = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt dx.$$