

Def

$A \subset E, f: A \times I \rightarrow (K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

On dit que f vérifie (H.D) si il existe

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, C, \pi$ positive et intégrable sur I .

tg. $\forall x \in A, |f(x, t)| \leq \varphi(t), \forall t \in I$

On dit que f vérifie (H.D.L)

si $\forall K$ compact $\subset A, \exists \varphi_K: I \rightarrow \mathbb{R}, C, \pi$ vérifiant $|f(x, t)| \leq \varphi_K(t), \forall t \in I$

Th2: de Continuité $A \subset E$

Si $\{f\}$ vérifie (H.D) et C, π sur I

Si $\{f\}$ vérifie (H.D.L) ou (H.D.L)

Alors $F: x \mapsto F(x) = \int_I f(x, t) dt$ est

Th3: de dérivabilité $f \in A \subset \mathbb{R}$

$\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est C^1 sur $A \times I$

Si $\{f\}$ vérifie (H.D) et C^1 sur A

Si $\{f\}$ vérifie (H.D.L) ou (H.D.L)

Alors $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est C^1 sur A

et $\forall x \in A, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Th4: Calcul de limite $T \subset \mathbb{D}$ généralisée

Soit $a \in \bar{A}$

Si $\{f\}$ vérifie (H.D) et C, π sur I

Si $\{f\}$ vérifie (H.D.L) ou (H.D.L)

tg. $\forall x \in A, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) dt$

Intégrale à paramètre

$F(x) = \int_I f(x, t) dt, x \in A$

I : intervalle $q \subset \mathbb{R}$

Considère C^1 (en x)

$\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est C^1 sur A

Si $\{f\}$ vérifie (H.D) et C^1 sur A

Si $\{f\}$ vérifie (H.D.L) ou (H.D.L)

Alors $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est C^1 sur A

et $\forall x \in A, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Conséquence

Si $\{f\}$ vérifie (H.D) et C^1 sur A

Alors F est C^∞ sur A

$\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt$

Il est facile de calculer $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$

on peut aussi: $\forall \eta, |F(x)| \leq g(x)$

avec $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

Th de Continuité

Si la fonction $f: (x, t) \rightarrow f(x, t)$

est continue sur $M \times [a, b]$

Alors $F: x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est continue.

Th de dérivation

$M \subset \mathbb{R}$

Si $(x, t) \mapsto f(x, t)$ est continue sur $M \times [a, b]$

Si $\forall t \in [a, b], x \mapsto f(x, t)$ est dérivable sur M .

Alors $(m, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $M \times [a, b]$

Alors F est C^1 sur M et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Théorème C^n

Si f est continue sur $M \times [a, b]$

Si $\forall k, 1 \leq k \leq n, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $M \times [a, b]$

Alors F est C^n sur M .

$$\forall k \in 1 \dots n, F^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

Intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt, x \in A$$

avec $f: M \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Théorème C^∞

Si f est continue sur $M \times [a, b]$

Si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ existe et est continue sur $M \times [a, b]$

Alors F est C^∞ sur M .

$$\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt$$

Théorème de Fubini

Si f est continue sur $[a, b] \times [c, d]$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, t) dx dt = \int_c^d \int_a^b f(x, t) dt dx$$