

Transformer de Laplace

Dans ce problème IK désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ $C(I, K)$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de I dans K et $C^p(I, K)$ désigne l'espace vectoriel des applications de classe C^p de I dans IK où $p \geq 1$

Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ converge, on note $L(f)(z)$ la valeur de cette intégrale. La fonction $L(f)$ ainsi définie est appelée la transformée de Laplace de f .

$$L(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

Partie I

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 0$.
2. a) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-yt}$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque t tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $y = 0$.
b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 0$.
3. Soient $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ soit convergente, et soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$. On désigne par F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x e^{-z_0 t} f(t) dt, \quad x \geq 0,$$

- a) Montrer que F est de classe C^1 et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
- b) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt.$$

4. Ici $f_\lambda \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ désigne la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Préciser le domaine de définition de $L(f_\lambda)$ et donner l'expression de $L(f_\lambda)(z)$ lorsque cette quantité est définie.

Abscisse de convergence

pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, on pose $C(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \text{ converge,}\}$.

On pose $\sigma(f) = \inf C(f)$ avec la convention $\sigma(f) = +\infty$ si $C(f) = \emptyset$ et $\sigma(f) = -\infty$ si $C(f)$ est non minoré.

$\sigma(f)$ est appelé abscisse de convergence de $L(f)$.

5. Montrer que si $\sigma(f)$ est un réel, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > \sigma(f)$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ converge.

Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ est une fonction telle que $\sigma(f) < +\infty$, alors d'après ce qui précède, la transformée de Laplace $L(f)$ est définie sur l'intervalle ouvert $]\sigma(f), +\infty[$.

Dans la suite du problème, on note aussi $L(f)$ la restriction à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$ de la transformée de Laplace de f .

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ une fonction telle que $\sigma(f) < +\infty$.

6. Montrer que f est continue sur $]\sigma(f), +\infty[$

7. Soit $[a, b] \subset]\sigma(f), +\infty[$.

a) Montrer que $L(f)$ est C^1 sur $[a, b]$ et que

$$L(f)'(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt, \quad \forall x > \sigma(f).$$

b) Montrer que $L(f)$ est C^2 sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que

$$L(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} f(t) dt, \quad \forall x > \sigma(f).$$

8. Soit ω la fonction définie par :

$$\omega(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}, \quad t > 0,$$

et on la prolonge par continuité en 0.

a) Préciser la valeur en 0 de la fonction et montrer que $\sigma(\omega) \leq 0$.

b) Pour tout $x > 0$, calculer la dérivée seconde de l'application $x \mapsto L(\omega)(x)$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c) En déduire, pour tout $x > 0$, l'expression de $L(\omega)(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Partie II : Comportement au voisinage de l'origine

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$; on s'intéresse dans cette question à l'étude du comportement au voisinage de 0^+ de la transformée de Laplace $L(f)$ en rapport avec l'existence de $L(f)(0)$.

1. Dans cette question, on suppose que $L(f)(0)$ existe, ce qui est équivalent à la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$. On en déduit que $\sigma(f) \leq 0$.

a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$L(f)(x) - L(f)(0) = x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0)) e^{-xt} dt,$$

où F désigne la primitive de f qui s'annule en 0.

b) En déduire que $L(f)(x)$ admet $L(f)(0)$ comme limite lorsque x tend vers 0^+ . On pourra exploiter le fait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = L(f)(0)$.

2. Le but de cette question est d'étudier des conditions suffisantes d'existence de $L(f)(0)$ lorsque la fonction $L(f)$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ en 0^+ (théorème de Tauber).

Dans cette question, on suppose que la fonction $t \mapsto tf(t)$ tend vers 0 en $+\infty$.

a) Justifier que $\sigma(f) \leq 0$.

b) Montrer que la fonction $a \mapsto \frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt$, définie sur $]0, +\infty[$, tend vers 0 en $+\infty$.

c) Montrer que, pour tout réel u ,

$$1 - e^{-u} \leq u.$$

d) Montrer que, pour tout x et a réels strictement positifs, on a

$$\left| L(f)(x) - \int_0^a f(t) dt \right| \leq \int_0^a (1 - e^{-xt}) |f(t)| dt + \int_a^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt.$$

En déduire que

$$\left| L(f)(x) - \int_0^a f(t) dt \right| \leq x \int_0^a |tf(t)| dt + \frac{1}{ax} \sup_{t \geq a} |tf(t)|.$$

e) On suppose de plus que la fonction $L(f)$ possède une limite $\mu \in \mathbb{C}$ en 0^+ . En choisissant convenablement x en fonction de a , déduire de ce qui précède que $L(f)(0)$ existe et vaut μ .