

Problème

Norme et intégrale à paramètre

On considère l'espace vectoriel $E_0 = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ tel que } f(0) = 0\}$. On pose

$$E_1 = \{f \in E_0 \text{ tel que } t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \text{ soit intégrable sur }]0, +\infty[\}.$$

$$E_2 = \left\{ f \in E_0 \text{ tel que } t \mapsto (f'(t))^2 \text{ soit intégrable sur }]0, +\infty[\right\}.$$

Partie I

1. a) Montrer si $f \in E_1$ et $g \in E_1$, alors la fonction $t \mapsto \frac{f(t)g(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
b) Montrer que E_1 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Pour tout $f \in E_1$, on pose $N_1(f) = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.
Montrer que N_1 est une norme sur E_1 .
3. a) Montrer que E_2 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
b) Pour tout $f \in E_2$, on pose $N_2(f) = \left(\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.
Montrer que N_2 est une norme sur E_2 .

Partie II

Dans cette partie, on considère la fonction f suivante :

$$f(t) = \arctan(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

1. Montrer que $f \in E_1$.
2. Soit $x \in]0, +\infty[$. On pose $h_x : t \mapsto h_x(t) = \frac{1}{(1+t^2)(t^2+x^2)}$.
Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction h_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis que $f \in E_2$.
3. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t) dt$.
4. a) Montrer que φ est continue sur $]0, +\infty[$.
b) Calculer $\varphi(x)$ pour $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$.
(Ind : Décomposer en élément simple la fraction rationnelle $F(Y) = \frac{1}{(Y+1)(Y+x^2)}$).
5. Déduire la valeur de $N_2(f)$.
6. Soit $x \in [0, +\infty[$. On pose $g_x : t \mapsto g_x(t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$.
et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt, \quad \forall x \geq 0$.
7. a) Montrer que la fonction G est définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
b) Calculer $G'(x)$, puis déduire $G(x), \forall x \in [0, +\infty[$.

8. Calculer $N_1(f)$.

Partie III

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

1. Montrer que $f \in E_2$ et calculer $N_2(f)$.

2. a) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt = \frac{\pi^2}{6}$, sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

c) Montrer que $N_1(f) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}} dt$.

d) Déduire la valeur de $N_1(f)$ (Utiliser le changement $u = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$).

Partie IV

Soit f une fonction quelconque de E_0 . On associe à f les fonctions g et h définies par :

$$g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}, \quad h(t) = \frac{f(t)}{t}, \quad \forall t > 0 \text{ et on pose } \beta = f'(0).$$

1. Calculer $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$. (Exprimer à l'aide de β).

2. Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$, $\forall t > 0$.

3. Calculer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t}g'(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)g'(t)$. (Exprimer à l'aide de β).

4. a) Etablir pour $x > 0$, la relation

$$\int_0^x (f'(t))^2 dt = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^x (h(t))^2 dt.$$

b) Déduire que si $f \in E_2$ alors pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x (h(t))^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt,$$

puis que $E_2 \subset E_1$.

5. Montrer que pour $f \in E_2$, on a l'inégalité $N_1(f) \leq 2N_2(f)$.

6. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = e^{-t} \sin(nt)$.

a) Vérifier que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de E_2 .

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin^2(nt)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2t} \frac{\sin^2(nt)}{n^2 t^2} dt = 0.$$

c) Déduire que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.