

Problème 2 "Intégrale à paramètre"

Notations

On désigne respectivement par :

- J l'intervalle $] -1, +\infty[$.
- $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de J dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{B}$ l'ensemble des applications continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles.
- $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f continues sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles, et telles que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Partie I

1. Prouver que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel contenant $\mathcal{B}$.
2. Vérifier que $\gamma : t \mapsto \sqrt{t} \sin(t)$ est élément de $\mathcal{E}$, mais n'appartient pas à $\mathcal{B}$.
On retiendra donc pour la suite du problème qu'un élément $f \in \mathcal{E}$ n'est pas forcément de signe constant, ni borné sur $[0, +\infty[$.
3. Soit f un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que, pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Dans la suite, pour $f \in \mathcal{E}$, on note $T[f]$ la fonction à valeurs réelles définie sur J par :

$$\forall x \in J, \quad T[f](x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{1+t^2+x} dt$$

4. Montrer que $T : f \mapsto T[f]$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Partie II

f désigne un élément fixé de $\mathcal{E}$.

1. Prouver que la fonction $T[f]$ est de classe C^∞ sur J et que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in J, \quad (T[f])^{(n)}(x) = - \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{n+1}} dt \quad (1)$$

Dans la suite on note, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}} dt$.

2. Montrer que pour tout réel x dans l'intervalle $] -1, 1[$, on a :

$$T[f](x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p I_p x^p \quad (3)$$

Partie III

1. Soit $f \in \mathcal{E}$. On définit Φ sur $\mathbb{R}^+$ par $\Phi(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{1+u^2} du$.
 - a) Vérifier que Φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
 - b) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} dt = \frac{I_k}{2k} \quad (4)$$

2. On suppose $f \in \text{Ker } T$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = 0$.
3. On considère $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(u) = \Phi\left(\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) & \text{si } u \in]0, 1] \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que φ est continue sur $[0, 1]$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^k \varphi(u) du = 0$.
- b) En déduire que $\forall u \in [0, 1]$, $\varphi(u) = 0$.

4. Montrer que l'application T est-elle injective.

Partie IV

Dans cette partie, on suppose que $f(t) = \cos(t)$.

1. Justifier que $f \in \mathcal{E}$.

On note $g = T[f]$ et pour $a > 0$, $h(a) = ag(a^2 - 1) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{a \cos t}{a^2 + t^2} dt$.

2. Établi, à l'aide d'une intégration par partie, que $\forall a > 0, |h(a)| \leq \frac{1}{a}$.

3. a) Vérifier que $h\left(\frac{1}{n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u/n)}{1 + u^2} du$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$.

4. Démontrer en utilisant les expressions de g' et g'' obtenues dans la partie II que $h''(a)$ existe pour tout $a > 0$ et peut se mettre sous la forme

$$h''(a) = \int_{\mathbb{R}^+} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{a}{a^2 + t^2} \right) \right] \cos(t) dt$$

5. Vérifier que pour $(a, t) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{a}{a^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{a}{a^2 + t^2} \right) = 0$$

a) Exprimer $h''(a)$ en fonction de $h(a)$.

b) Montrer que pour tout $a > 0$, $h(a) = \frac{\pi}{2} e^{-a}$ et en déduire $g(x)$.

6. Déterminer le $DL_2(0)$ de $g(x)$.

a) Calculer $K_0 = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\cos t}{1 + t^2} dt$, $K_1 = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\cos t}{(1 + t^2)^2} dt$ et $K_2 = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\cos t}{(1 + t^2)^3} dt$.

b) Justifier l'existence et déterminer la valeur de $K' = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t \sin t}{1 + t^2} dt$.