

Problèmes Intégrale à paramètre

Problème 1(d'après concours 2008).

Notations

— Étant donné une suite de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ converge si les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{-n}$ convergent. Dans ce cas, on note

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

Partie I

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceau et **intégrable** sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-itx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On pose alors la fonction

$$\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx} dt$$

appelée la transformée de Fourier de f .

2. Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la fonction

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t^k f(t)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier $p \in \{1, \dots, k\}$

$$(\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = (-i)^p \mathcal{F}(f_p) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. (a) On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(i) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

(ii) En déduire que

$$\mathcal{F}(f')(x) = ix\mathcal{F}(f)(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que $f', \dots, f^{(k)}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout entier $p \in \{1, \dots, k\}$

$$\mathcal{F}(f^{(p)})(x) = (ix)^p \mathcal{F}(f)(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Partie II

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ et telles que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n f^{(m)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0.$$

Dans toute cette partie f désigne un élément de $\mathcal{S}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = (-i)^p \mathcal{F}(f_p)(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}(f^{(p)})(x) = (ix)^p \mathcal{F}(f)(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

- (c) Montrer que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$.

2. (a) Montrer que pour tout $h > 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(nh)$ est absolument convergente.

- (b) Montrer que pour tout $h > 0$,

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx - \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty} h \int_n^{n+1} (f(th) - f(nh)) dt.$$

En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x) dx - \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh) \right| \leq h \int_0^{+\infty} |f'(x)| dx$$

- (c) Montrer alors que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

(d) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(-nh)$ est absolument convergente et que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} hf(nh) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Problème 2 (d'après concours 2025).

Partie I

Dans toute cette partie, on considère une application continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

On note $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que l'application F admet une limite finie en $+\infty$ et qu'elle est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $a > 0$, l'application $t \mapsto e^{-at}F(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)dt = a \int_0^{+\infty} e^{-at}F(t)dt.$$

On considère l'application $\mathcal{L} : a \in [0, +\infty[\mapsto \mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$.

4. Montrer que $\mathcal{L}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}^{(n)}(a) = a \int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-at}F(t)dt + n \int_0^{+\infty} (-t)^{n-1} e^{-at}F(t)dt.$$

5. Justifier que pour tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u}F\left(\frac{u}{a}\right) du,$$

puis en déduire que $\mathcal{L}$ admet une limite finie à droite de 0 et que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(a) = I.$$

6. Prouver que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(a) = 0$.

Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$.

7. Justifier que l'application $G : x \mapsto G(x)$ est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

8. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

9. Soit $x > 0$. Prouver que $\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = -G(x) + \frac{1}{x} \int_0^x G(t) dt$.

10. En déduire que

$$\int_0^x t f(t) dt = o(x).$$

On considère dans la suite, l'application

$$\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

11. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Pour $a \geq 0$, on pose $\mathcal{L}_\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(t) dt$.

12. Montrer que $\mathcal{L}_\varphi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $a > 0$, $\mathcal{L}'_\varphi(a) = -\frac{1}{1+a^2}$.

13. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Partie II

Dans toute cette partie, on considère une application continue $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0, \\ \text{Pour tout } a > 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{C}. \end{array} \right.$$

On définit l'application

$$g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{2} f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt$ convergent, pour tout $a > 0$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-at} f(t) dt = xg(x)e^{-ax} + \int_0^x e^{-at} g(t) dt + a \int_0^x t e^{-at} g(t) dt,$$

et en déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt + a \int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt$.

4. Prouver que $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \int_0^{+\infty} t e^{-at} g(t) dt = 0$ et en déduire que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$ existe et vaut

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t |g(t)| dt = 0$.

6. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t \leq e^t$.

7. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x g(t) dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \right) = 0$.

8. Justifier la convergence des intégrales $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt$, pour tout $x > 0$ et montrer que

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t} dt\right).$$

9. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} g(t) dt = 0$.

10. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$.

11. Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t) dt = xg(x) + \int_0^x g(t) dt$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

On considère l'application

$$\phi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{e^t - 1} - \sin t & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

12. Justifier que ϕ est continue sur $[0, +\infty[$.

13. Soit $a > 0$. Prouver que $\int_0^{+\infty} e^{-at}\phi(t)dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\phi(t)dt = -\frac{1}{1+a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2}.$$

(On pourra utiliser un développement en série entière).

14. Montrer que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-at}\phi(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$, mais que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ diverge.