

Correction Problème 2 "Intégrale à paramètre"

I.1° Il est immédiat que $\mathcal{E}$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire, donc $\mathcal{E}$ est un **sous-espace vectoriel** du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathcal{B}$. Alors il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall t \geq 0, |f(t)| \leq M$.

Ainsi $\forall t \geq 0, \left| \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{M}{1+t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui montre que $t \rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2}$ (déjà continue) est en outre intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $f \in \mathcal{E}$. Donc $\boxed{\mathcal{B} \subset \mathcal{E}}$.

I.2° $\gamma : t \rightarrow \sqrt{t} \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $|\gamma(t)| \leq \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ ce qui prouve que γ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $\gamma \in \mathcal{E}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\gamma\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ qui tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui montre que γ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^+$.

I.3° Pour tout x fixé dans $J =]-1, +\infty[$, $1 + t^2 + x > 0$ et par suite la fonction $t \rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $\frac{|f(t)|}{1+t^2+x} \sim \frac{|f(t)|}{1+t^2}$ et que $f \in \mathcal{E}$, le théorème des fonctions équivalentes positives permet de conclure à l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $t \rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2+x}$.

I.4° $T : f \rightarrow T[f]$ est clairement une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Sa linéarité découle immédiatement de la linéarité de l'intégration : $(T[f + \lambda g])(x) = T[f](x) + \lambda T[g](x)$

Partie II

II.2°.a)

— $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto g : (x, t) \rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est C^∞ sur J . Une récurrence facile permet de montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in J \times \mathbb{R}^+, \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t) = (-1)^p p! \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}}.$$

— $\forall p \in \mathbb{N}, t \mapsto \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t)$ est continue par morceau sur $\mathbb{R}^+$.

— Soit $[a, b] \subset J$ avec $-1 < a < b$.

$$\forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, \left| \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \frac{|f(t)|}{(1+t^2+a)^{p+1}} \text{ notée } \varphi_{K,p}(t).$$

$\varphi_{K,p}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car négligeable en $+\infty$ devant $\varphi_{K,0}$).

On en déduit que, $T[f]$ est dérivable à tout ordre p sur J et que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (T[f])^{(p)}(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t) dt = (-1)^p p! F_p(x).}$$

II.2°.b) Pour $x = 0$, on obtient $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, (T[f])^{(p)}(0) = (-1)^p p! I_p.}$

II.3°.a) Comme $1 + t^2 \geq 1$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, (1 + t^2)^{p+1} \geq 1 + t^2$ et donc

$$\frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}} \leq \frac{|f(t)|}{(1+t^2)}.$$

Comme $f \in \mathcal{E}$, on en déduit l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de $t \rightarrow \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}}$ et l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}} dt \leq \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)} dt.$$

II.3°.b)

Soit x fixé dans $] -1, 1[$. On remarque que $\forall t \geq 0, \left| \frac{x}{1+t^2} \right| < 1$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \frac{f(t)}{1+t^2+x} &= \frac{f(t)}{1+t^2} \frac{1}{1+\frac{x}{1+t^2}} = \frac{f(t)}{1+t^2} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{x}{1+t^2} \right)^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^p \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}} \end{aligned}$$

On pose $I = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt$.

Posons $u_p(t) = (-1)^p \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}} x^p$ où x est fixé dans $] -1, 1[$.

— Chaque fonction u_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (d'après le **II.3°.a**).

— la série de fonctions $\sum u_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$

vers $S_x : t \rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2+x}$.

— S_x est continue sur $\mathbb{R}^+$.

— la série $\sum \int_{\mathbb{R}^+} |u_p|$ est convergente car $\int_{\mathbb{R}^+} |u_p| \leq I|x|^p$ avec $I = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt$.

On peut alors donc appliquer le théorème d'intégration termes à termes et on en déduit que S_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (ce qu'on savait déjà) et que

$$\int_{\mathbb{R}^+} S_x = \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{p=0}^{\infty} u_p = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^+} u_p, \text{ c'est-à-dire}$$

$$T[f](x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p I_p x^p \text{ pour } |x| < 1.$$

Partie III

III.1° On remarque que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ comme étant la primitive qui s'annule en 0 de la fonction continue $t \rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2}$.

III.1°.a) En particulier Φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et a une limite finie en $+\infty$ (égale à $I_0 = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{1+t^2} dt$).

On sait qu'alors Φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Mieux : $\forall t \geq 0, |\Phi(t)| \leq \int_0^t \frac{|f(u)|}{1+u^2} du \leq I = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(u)|}{1+u^2} du$ (indépendant de t).

III.1°.b) La fonction $\Psi_k : t \rightarrow \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur $[0, 1]$.

$\forall t \geq 1, |\Psi_k(t)| \leq \frac{I}{t^{2k+1}}$, ce qui montre que Ψ_k est intégrable sur $[1, +\infty[$ et par suite sur $\mathbb{R}^+$.

Une intégration par parties sur $[0, y]$ pour $y > 0$ avec $u(t) = \Phi(t)$ et $v(t) = \frac{-1}{2k(1+t^2)^k}$ donne, sachant que $\Phi(0) = 0$: $\int_0^y \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} dt = \frac{-1}{2k} \frac{\Phi(y)}{(1+y^2)^k} + \frac{1}{2k} \int_0^y \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+t^2)^k} dt$.

Φ étant bornée, le premier terme tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$.

Donc $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} dt = \frac{I_k}{2k}$

III.2° Si $T[f]$ est la fonction nulle sur J , alors d'après le **II.3°.b**), $\forall x \in] -1, 1[, \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I_k x^k = 0$, d'où $I_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, (par unicité de développement en série entière de la fonction nulle).

On a aussi le fait que toutes les dérivées successives en 0 de $T[f]$ sont nulles, d'où la nullité de tous les I_k en utilisant cette fois le résultat du **II.2°.b**).

III.3°.a) φ est déjà continue sur $]0, 1]$ comme composée de $\theta : u \rightarrow \sqrt{\frac{1-u}{u}}$ continue sur $]0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et de Φ continue sur $\mathbb{R}^+$.
 Pour la continuité en 0, on remarque que $\lim_{u \rightarrow 0} \theta(u) = +\infty$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = I_0 = 0$ (car $f \in \text{Ker } T$), d'où par composition de limites, $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0 = \varphi(0)$.

Ainsi φ est continue sur $[0, 1]$.

En utilisant les résultats des questions **II.1.b)** et **III.2**, on a $\forall k \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+2}} dt = 0$.

En effectuant dans l'intégrale simple $\int_0^y \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+2}} dt$ le changement de variable $u \rightarrow t = \sqrt{\frac{1-u}{u}}$ décroissant de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\frac{1}{1+y^2}, 1]$ sur $[0, y]$, on obtient d'abord ($u = \frac{1}{1+t^2}, du = \frac{-2tdt}{(1+t^2)^2}$) :

$$2 \int_0^y \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+2}} dt = \int_{1/(1+y^2)}^1 u^k \varphi(u) du, \text{ d'où l'on déduit quand } y \rightarrow \infty$$

(puisque les deux intégrales existent) : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 u^k \varphi(u) du = 0$.

III.3°.b) On sait (**théorème de Weierstrass**) que φ continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales.

φ étant bornée sur le segment $[0, 1]$, il est facile de montrer que la suite $(P_n \varphi)_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers φ^2 . On sait qu'alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(u) \varphi(u) du = \int_0^1 \varphi^2(u) du.$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(u) \varphi(u) du = 0.$$

On a donc $\int_0^1 \varphi^2(u) du = 0$ avec φ^2 continue et positive sur $[0, 1]$. On sait que nécessairement :

$$\forall u \in [0, 1], \varphi(u) = 0.$$

III.4° Ainsi $\forall u \in]0, 1], \varphi(u) = \Phi\left(\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) = 0$, c'est-à-dire $\forall t \geq 0, \Phi(t) = 0$.

Or Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, donc en dérivant, on obtient $\forall t \geq 0, \Phi'(t) = \frac{f(t)}{1+t^2} = 0$.

Donc f est la fonction nulle.

On a donc montré que si $T[f] = 0$, alors $f = 0$, ce qui signifie que T est injective.

Partie IV

IV.1° En intégrant par parties, on obtient $\forall x > 0, \int_0^x \frac{a \cos t}{a^2 + t^2} dt = \frac{a \sin x}{a^2 + x^2} +$

$$\int_0^x \frac{2at \sin t}{(a^2 + t^2)^2} dt.$$

Or $\frac{2at \sin t}{(a^2 + t^2)^2} = O\left(\frac{1}{t^3}\right)$, ce qui montre que $t \rightarrow \frac{2at \sin t}{(a^2 + t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

En passant à la limite quand $x \rightarrow \infty$, on obtient $h(a) = 2a \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t \sin t}{(a^2 + t^2)^2} dt$.

$$\text{Ainsi } |h(a)| \leq a \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2t}{(a^2 + t^2)^2} dt = \left[\frac{-a}{a^2 + t^2} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{a}.$$

$$n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } h\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\cos\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2} du.$$

IV.2°.b) On va appliquer le **théorème de la convergence dominée** :

Considérons la suite de fonctions (h_n) définies sur $\mathbb{R}^+$ par $h_n(u) = \frac{\cos\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}$.

- chaque fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $q : u \rightarrow \frac{1}{1+u^2}$.
- chaque fonction h_n est **dominée** sur $\mathbb{R}^+$ par q .
- la fonction **dominante** q est **intégrable** sur $\mathbb{R}^+$ (cf **I.1°**).

On a donc toutes les hypothèses pour appliquer le théorème de la convergence dominée : on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^+} h_n = \int_{\mathbb{R}^+} q$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

IV.3° On a vu au **II.2.a** que $g = T[f]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J .

Il en résulte par composition que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

On a : $h'(a) = g(a^2-1) + 2a^2g'(a^2-1)$ et $h''(a) = 6ag'(a^2-1) + 4a^3g''(a^2-1)$.

$$\begin{aligned} \text{On obtient } h''(a) &= \int_{\mathbb{R}^+} \left[\frac{8a^3}{(a^2+t^2)^3} - \frac{6a}{(a^2+t^2)^2} \right] (\cos t) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \left[\frac{a^3 - 6at^2}{(a^2+t^2)^3} \right] (\cos t) dt. \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs, } \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{a}{a^2+t^2} \right] = \frac{t^2 - a^2}{(a^2+t^2)^2} = (t^2 - a^2)(a^2+t^2)^{-2}, \text{ puis}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left[\frac{a}{a^2+t^2} \right] = \frac{a^3 - 6at^2}{(a^2+t^2)^3}.$$

$$h''(a) = \int_{\mathbb{R}^+} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{a}{a^2+t^2} \right) \right] (\cos t) dt.$$

IV.4° On obtient facilement que pour $(a, t) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{a}{a^2+t^2} \right) +$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{a}{a^2+t^2} \right) = 0.$$

$$\text{Ainsi } h''(a) = - \int_{\mathbb{R}^+} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{a}{a^2+t^2} \right) \right] (\cos t) dt.$$

IV.5°a) À l'aide de deux intégrations par parties effectuées d'abord sur $[0, x]$, on obtient successivement $h''(a) = \int_{\mathbb{R}^+} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a}{a^2+t^2} \right) \right] (\sin t) dt$, puis

$$h''(a) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{a \cos t}{a^2+t^2} dt. \text{ Donc } \boxed{h''(a) = h(a)}.$$

IV.5°b) $h(a)$ est donc de la forme $\lambda e^a + \mu e^{-a}$.

D'après **IV.1**, $\lim_{a \rightarrow +\infty} h(a) = 0$, d'où $\lambda = 0$. D'après **IV.2.b)**, $\mu = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Ainsi } \boxed{\forall a > 0, h(a) = \frac{\pi}{2} e^{-a}}. \text{ Puis } \boxed{g(x) = \frac{\pi \exp(-\sqrt{1+x})}{2\sqrt{1+x}}}.$$

IV.6° $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$.

$$\text{On obtient alors } \boxed{g(x) = \frac{\pi}{2e} \left(1 - x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2) \right)}.$$

IV.7°b) $\int_0^A \frac{t \sin t}{1+t^2} dt = \frac{-A \cos A}{1+A^2} + \int_0^A \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cos t dt$. Or $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cos t = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, d'où l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{Ainsi } K' = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cos t dt = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2-(1+t^2)}{(1+t^2)^2} \cos t dt = 2K_1 - K_0.$$

$$\text{Donc } \boxed{K' = \frac{\pi}{2e}}.$$