

PRELIMINAIRES

- On notera qu'il est dit dans la troisième partie que $N_1(f) \leq 2N_2(f)$, ce qui donne un contrôle (très partiel) des calculs des deux premières parties.
- Dans tout le problème je note ϕ les fonctions auxiliaires introduites.
- J'utilise régulièrement la propriété: Si ϕ est continue positive sur $\mathbb{R}^{++}$, si ϕ se prolonge par continuité en 0 et si $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 \phi(t)) = L \in \mathbb{R}$ alors ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}^{++}$. En effet les deux premières hypothèses assurent l'intégrabilité sur $]0, 1]$ alors que la première et la troisième l'assure sur $[1, +\infty[$.
- De même si ϕ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et si $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 \phi(t)) = L \in \mathbb{R}$ alors ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

PARTIE I - Exemple 1

1)

La fonction arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, elle vérifie $\arctan(0) = 0$, donc f est dans E_0 .

Par ailleurs l'application $\phi : \forall t \in \mathbb{R}^{++}, \phi(t) = \frac{\arctan(t)^2}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{++}$ car

- elle est continue positive sur $\mathbb{R}^{++}$
- elle se prolonge par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 \phi(t)) = \frac{\pi^2}{4}$

Donc :

f appartient à E_1

2)

- La fonction H_x est continue positive sur $\mathbb{R}^+$,
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 H_x(t)) = 0$.

donc H_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On remarque que $(f'(t))^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2} = H_1(t)$ et donc :

$f \in E_2$

3.1)

On écrit $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \phi(x, t) dt$ avec : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^+ \quad \phi(x, t) \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$. (le dénominateur est non nul car $x > 0$)

- pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$ la fonction $t \mapsto \phi(x, t)$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$
- pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ la fonction $x \mapsto \phi(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{++}$
- On a la domination sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^{++}$:

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+ \quad \phi(x, t) \leq \frac{1}{a^2 + t^2} \begin{cases} \text{indépendant de } x \\ \text{continue intégrable sur } \mathbb{R}^+ \text{ (fonction continue, positive sur } \mathbb{R}^+ \text{ car } a > 0 \\ \text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 \frac{1}{a^2 + t^2}) = 1) \end{cases}$$

d'où par théorème sur les intégrales à paramètres :

φ est continue sur $\mathbb{R}^{++}$

3.2)

$$\frac{1}{(T+1)(T+x^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{-1}{T+1} + \frac{1}{T+x^2} \right].$$

3.3) D'où

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{-1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+x^2} \right] dt &= \frac{1}{x^2-1} \left[\int_0^X \frac{dt}{t^2+1} - \int_0^X \frac{dt}{t^2+x^2} \right] \\ &= \frac{1}{x^2-1} \left(\arctan(X) - \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{X}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

comme $x > 0$ on a par passage à la limite : $\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x} \right) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$.

$$\forall x > 0, x \neq 1 : \varphi(x) = \frac{x}{2x(x+1)}$$

$$(N_2(f))^2 = \int_{\mathbb{R}^+} (f'(t))^2 dt = \int_{\mathbb{R}^+} H_1(t) dt = \varphi(1).$$

Or φ est continue d'après 3.1 donc par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4) En posant $\phi(u) = u - \arctan u$ on a : $\phi'(u) = 1 - \frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2} \geq 0$.
Donc ϕ est croissante et comme $\phi(0) = 0$ on obtient :

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, u - \arctan u > 0$$

5)

• La fonction G_x est continue positive sur $\mathbb{R}^{++}$

• elle se prolonge par continuité en $t = 0$ par $G_x(0) = x$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 G_x(t)) = 0$$

donc :

G_x est intégrable $\mathbb{R}^{++}$

6.1)

soit ϕ :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{++}, \phi(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(t^2 + 1)}$$

• pour tout $x \in \mathbb{R}^+, t \rightarrow \phi(x, t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}^{++}$

• pour tout $t \in \mathbb{R}^{++}, t \rightarrow \phi(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

• On a d'après la question 4 la domination sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^+ : \phi(x, t) \leq \frac{b}{(t^2 + 1)}$ indépendant de x
continue intégrable sur $\mathbb{R}^{++}$

Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique et donne la continuité de θ sur tout intervalle $[a, b]$ donc sur $\mathbb{R}^+$.

6.2)

De plus $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(t^2 + 1)(1 + t^2 x^2)}$ et

• pour tout $x \in \mathbb{R}^+, t \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}^{++}$ (car continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)) = 0$)

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• pour tout $t \in \mathbb{R}^{++}, x \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

• On a la domination sur $\mathbb{R}^+ : \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \leq \frac{1}{t^2 + 1}$ indépendant de x
continue intégrable sur $\mathbb{R}^{++}$

donc d'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre on a :

θ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$

6.3)

De plus avec le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \theta'(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2 t^2)} dt.$$

Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(\frac{1}{x^2} + t^2)} dt = \frac{1}{x^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \text{ d'après 3.3} \\ &= \frac{\pi}{2x+1} \end{aligned}$$

$x=0$ et $x=1$ le résultat reste vrai par continuité (θ' est continue sur $\mathbb{R}^+$, ainsi que $x \rightarrow \frac{x}{2x+1}$ peut aussi calculer la primitive par décomposition en éléments simples.

Comme θ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ on a : $\theta(x) = \theta(0) + \int_0^x \theta'(t) dt = \frac{\pi}{2} \ln(x+1)$.

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1)$

6.5) $(N_1(f))^2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$ et $\theta(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt$.

On intègre par parties sur un segment $[1, X]$ avec les fonctions C^1 : $u = \arctan(t^2)$, $v = -1/t$

$$\begin{aligned} \int_1^X \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt &= \left[-\frac{\arctan(t)^2}{t} \right]_1^X + \int_1^X \frac{\arctan t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt \\ &= -2 \frac{\arctan(X)}{X(X^2+1)} + \frac{\pi^2}{16} + \int_1^X \frac{\arctan t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

et le passage à la limite quand $X \rightarrow +\infty$ (possible car les intégrales impropres convergent) donne :

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi^2}{16} + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt$$

et de même sur $[X, 1]$

$$\begin{aligned} \int_X^1 \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt &= \left[-\frac{\arctan(t)^2}{t} \right]_X^1 + \int_X^1 \frac{\arctan t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt \\ &= 2 \frac{\arctan(X)}{X(X^2+1)} - \frac{\pi^2}{16} + \int_X^1 \frac{\arctan t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

et le passage à la limite quand $X \rightarrow 0$ donne en utilisant $\arctan(X) \sim_0 X$:

$$\int_0^1 \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt = -\frac{\pi^2}{16} + \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt$$

d'où :

$$(N_1(f))^2 = 2\theta(1).$$

6.6) et donc :

$$N_1(f) = \sqrt{\pi \ln 2} \text{ et } \frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln 2}$$

remarque : $2\sqrt{\ln 2} \leq 2$ car $\ln(2) \leq 1$

PARTIE II - Exemple 2

1)

- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. On a donc $f(t) = \arg sh(t)$. (la fonction $\arg sh$ n'est pas au programme en 2004)
- f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) = 0$ donc f est dans E_0
- De plus $(f'(t))^2 = \frac{1}{t^2+1}$ ce qui montre que f'^2 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc $f \in E_2$.
- $(N_2(f))^2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'où

$$N_2(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2)

- Quand t tend vers 0 :

$$f(t) = \arg sh(t) \sim t.$$

- Quand t tend vers $+\infty$:

$$f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) = \ln t + \ln(1 + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}) \sim \ln t$$

car $\ln t$ tend vers $+\infty$ tandis que $\ln(1 + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}})$ tend vers $\ln 2 \ll \ln(t)$

ou en utilisant $u = \arg \operatorname{sh}(t)$ on a $t = \operatorname{sh}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \sim \frac{e^u}{2}$ donc $u \sim \ln(2t) = \ln(t) + \ln(2) \sim \ln(t)$

3)

- f est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) = 0$.
- La fonction $\phi(t) = \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$
 - est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$;
 - est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 d'après la question précédente;
 - $t^{3/2}\phi(t) = \frac{\arg \operatorname{sh}(t)^2}{\sqrt{t}} \sim_{+\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t^{1/4}}\right)^2$ de limite nulle avec $3/2 > 1$

donc ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Tout ceci montre

$$f \in E_1$$

4.1)

- La fonction $\phi(t) = \frac{-\ln t}{1-t^2}$ est continue positive sur $]0, 1[$.
- Quand $t \rightarrow 1$, $\phi(t) = \frac{-\ln t}{(1-t)(1+t)} \sim \frac{1}{1+t} \rightarrow \frac{1}{2}$ donc la fonction est prolongeable par continuité et donc elle est intégrable sur $[1/2, 1[$.
- Quand $t \rightarrow 0$, $\phi(t) \sim -\ln t$ intégrable sur $]0, 1/2]$.

donc ϕ est intégrable sur $]0, 1[$.

4.2) soit $\phi_k(t) = -t^{2k} \ln(t)$

pour $k = 0$: $-\ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1[$

pour $k \geq 1$:

- l'application ϕ_k est continue positive sur $]0, 1[$.
- la fonction est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'application ϕ_k est intégrable sur $]0, 1[$ donc sur $]0, 1[$.

On intègre par parties sur $[X, 1]$:

$$\int_X^1 t^{2k} \ln t dt = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t \right]_X^1 - \frac{1}{2k+1} \int_X^1 t^{2k} dt = \frac{-X^{2k+1}}{2k+1} \ln X - \frac{1}{(2k+1)^2} [1 - X^{2k+1}]$$

et on peut faire tendre X vers 0 l'intégrale impropre étant convergente

$$J_k = \frac{1}{(2k+1)^2}$$

4.3) Il s'agit de justifier l'intégration terme à terme.

- Les fonctions ϕ_k sont continues intégrables sur $]0, 1[$.
- la série $\sum \phi_k$ converge (série géométrique de raison $x^2 \in]0, 1[$)
- la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k(x) = \frac{-\ln(x)}{1-x^2}$ est continue sur $]0, 1[$
- la série $\sum \int_{]0,1[} |-t^{2k} \ln t| dt$ converge : en effet la série $\sum \int_{]0,1[} -t^{2k} \ln t dt = \sum J_k = \sum \frac{1}{(2k+1)^2}$, séries à termes positifs avec $k^2 \frac{1}{(2k+1)^2} \rightarrow \frac{1}{4}$

Le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions donne que ϕ est intégrable sur $]0, 1[$ que :

$$\int_{]0,1[} \phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} \phi_k$$

soit :

$$J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

pour calculer cette somme on part de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on sépare les termes pairs et les termes impairs.

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = J + \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6}$$

on obtient :

$$J = \frac{\pi^2}{8}$$

5.1)

$$I = (N_1(f))^2 = \int_{\mathbb{R}^+} f^2(t) \frac{1}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \arg sh(t)^2 \frac{1}{t^2} dt$$

Intégrons par parties comme au I.6.5 :

$$\begin{aligned} \int_1^X \arg sh(t)^2 \frac{1}{t^2} dt &= \left[\frac{-\arg sh(t)^2}{t} \right]_1^X + 2 \int_1^X \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= \arg sh(1) - \frac{\arg sh(X)^2}{X} + 2 \int_1^X \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt \end{aligned}$$

on peut faire tendre X vers $+\infty$ car

- $\frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ comme fonction continue, positive, telle que $t^{3/2} \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{\arg sh(t)}{\sqrt{1+t^2}} \sim \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ a une limite nulle.
- $\frac{\arg sh(X)^2}{X} \sim \left(\frac{\ln(X)}{X^{1/2}} \right)^2$ a une limite nulle si X tend vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \arg sh(t)^2 \frac{1}{t^2} dt = \arg sh(1) + 2 \int_1^{+\infty} \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

et de même:

$$\begin{aligned} \int_X^1 \arg sh(t)^2 \frac{1}{t^2} dt &= \left[\frac{-\arg sh(t)^2}{t} \right]_X^1 + 2 \int_X^1 \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= -(\arg sh(1))^2 + \frac{\arg sh(X)^2}{X} + 2 \int_X^1 \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt \end{aligned}$$

on peut faire tendre X vers 0 car :

- $\frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ comme fonction continue, positive, prolongeable par continuité en 0 par 1
- $\frac{\arg sh(X)^2}{X} \sim X$ a une limite nulle si X tend vers 0 :

$$\int_0^1 \arg sh(t)^2 \frac{1}{t^2} dt = -(\arg sh(1))^2 + 2 \int_0^1 \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

ce qui donne le résultat demandé :

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

5.2)

$f'(t) = \frac{1}{t^2+1} > 0$ et f admet 0 pour limite en 0 et $+\infty$ pour limite en $+\infty$ ce qui montre que f réalise un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

On peut donc faire le changement de variable :

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{u}{sh(u)} du.$$

D'autre part, l'application $u \mapsto e^{-u}$ réalise un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$, ce qui justifie le changement de variable $v = e^{-u}$;

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{u}{sh u} du = 4 \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - e^{-u}} du = 4 \int_0^1 \frac{-\ln v}{\frac{1}{v} - v} \frac{dv}{v} = 4J = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$I = \frac{\pi^2}{2}$$

5.3)

$$N_1(f) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ et } \frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}.$$

PARTIE III

1.1)

$h(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$. Comme f est dérivable en 0 de dérivée α d'où $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \alpha$

$g(t) = \sqrt{t}h(t)$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$

1.2)

$g'(t) = \frac{f'(t)\sqrt{t} - f(t)\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t}$ donc $\sqrt{t}g'(t) = f'(t) - \frac{f(t)}{2t}$ soit $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = \frac{1}{2}h(t)$.

1.3)

$\sqrt{t}g'(t) = f'(t) - \frac{1}{2}h(t)$ or f est de classe C^1 donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = \alpha$ et on sait $\lim_{t \rightarrow 0^+} (h(t)) = \alpha$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t}g'(t) = \frac{\alpha}{2}$$

et comme $g(t)$ tend vers 0

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)g'(t) = 0$$

1.4)

- f étant C^1 sur $[0, x]$, l'application f'^2 est continue sur $[0, x]$ donc intégrable.
- $t \mapsto (\sqrt{t}g'(t))^2$ et $t \mapsto (h(t))^2$ sont prolongeable par continuité en 0 d'après les questions précédentes
- $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \frac{1}{2}h(t)$ donne après prolongement par continuité en 0.

$$\begin{aligned} \int_0^x (f'(t))^2 dt &= \int_0^x \left[(\sqrt{t}g'(t))^2 + \frac{1}{4}(h(t))^2 + \sqrt{t}g'(t)h(t) \right] dt = \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \int_0^x \frac{1}{4}(h(t))^2 dt + \int_0^x g'(t)g(t) dt \\ &= \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \int_0^x \frac{1}{4}(h(t))^2 dt + \int_0^x g'(t)g(t) dt + \frac{1}{2}g(x)^2 \text{ car } g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \end{aligned}$$

c'est la relation (R)

$$\int_0^x (f')^2 = \int_0^x (\sqrt{t}g')^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^x (h(t))^2 dt + \frac{1}{2} (g(x))^2$$

2.1)

Soit $f \in E_1$. Montrer que $f \in E_1$ revient à montrer que h^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Comme $h^2 \geq 0$ cela revient encore à montrer que l'application $x \mapsto \int_0^x h^2$ est majorée (car elle est croissante et que pour une fonction positive l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale impropre)

Or, d'après (R) on a :

$$\int_0^x h^2 \leq 4 \int_0^x f'^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f'^2$$

ce qui donne la majoration. Donc $f \in E_1$. Et donc

$$E_2 \subset E_1$$

2.2)

D'une part $\phi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ est continue positive sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1, et $t^{3/2}\phi(t)$ tend vers 0 si t tend vers $+\infty$: elle est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme $\sin \in E_0$ on obtient que $\sin \in E_1$.

D'autre part $\int_0^{n\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{n\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{n\pi}{2} \rightarrow +\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \cos^2 t dt$ diverge et donc $\sin \notin E_2$.

$$E_1 \text{ n'est pas inclus dans } E_2$$

3.1) On procède comme pour les fonctions de carré intégrable en utilisant que pour (a, b) réels $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

• E_2 est inclus dans E_0 par définition

• E_2 est non vide (cf exemples du I et du II)

• E_2 est stable par addition : Si f et g sont dans E_2 $(f' + g')^2$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et $(f' + g')^2 = f'^2 + g'^2 + 2f'g' \leq 2(f'^2 + g'^2)$ donc par majoration $(f' + g')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

• E_2 est stable par produit externe : si f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $((\lambda f)')^2 = \lambda^2 f'^2$ l'est aussi.

E_2 est un sous espace vectoriel de E_1

3.2)

Au 2.1 on a vu $\forall x > 0$, $\int_0^x (f'(t))^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$
et en faisant tendre x vers $+\infty$ cela donne :

$$(N_1(f))^2 \leq 4(N_2(f))^2$$

d'où encore :

$$N_1(f) \leq 2N_2(f)$$

3.3)

On a bien $f_n(0) = 0$ et f_n de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $f'_n(t) = e^{-t}(-\sin nt + n \cos nt)$ donc

$$\begin{aligned} (f'_n(t))^2 &= e^{-2t}(\sin^2 nt + n^2 \cos^2 nt - n \sin 2nt) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2nt) + \frac{n^2}{2}(1 + \cos 2nt) - n \sin 2nt\right) \\ &= \frac{n^2 + 1}{2}e^{-2t} + \frac{n^2 - 1}{2}e^{-2t} \cos(2nt) - ne^{-2t} \sin(2nt) \end{aligned}$$

Pour calculer les intégrales, on passe par les complexes :

$$\int_0^X e^{-2t} e^{2int} dt = \left[\frac{e^{-2t+2int}}{-2+2in} \right]_0^X = \frac{1 - e^{-2X} e^{2inX}}{2 - 2in} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(1 - in)} = \frac{1 + in}{2(1 + n^2)}$$

car $|e^{-2X} e^{2inX}| = e^{-2X}$
ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \cos 2nt dt = \frac{1}{2(1 + n^2)} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sin 2nt dt = \frac{n}{2(1 + n^2)}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} (f'_n(t))^2 dt = \frac{1 + n^2}{2} \frac{1}{2} + \frac{n^2 - 1}{2} \frac{1}{2(1 + n^2)} - n \frac{n}{2(1 + n^2)} = \frac{1}{4(1 + n^2)} [(n^2 + 1)^2 + (n^2 - 1) - 2n^2] = \frac{n^2}{4}$$

et enfin :

$$N_2(f_n) = \frac{n}{2}$$

3.4)

Que faut-il faire : existe-t-il a et b strictement positifs tels que pour toute fonction $f \in E_2$ $aN_2(f) \leq N_1(f) \leq bN_2(f)$?

On connaît déjà $b = 2$. Le problème est donc a .

Si a existe on doit montrer $\forall f \in E_2$ $aN_2(f) \leq N_1(f)$. Si a n'existe pas on doit construire un contre exemple et trouver une suite (f_n) telle que $\lim \left(\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} \right) = 0$.

vue la question précédente c'est le plan "a n'existe pas" qui est préparé. On montre donc $\lim \left(\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} \right) = 0$

f_n est dans E_2 , donc dans E_1 . On a $N_1(f_n)^2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} \sin^2(nt)}{t^2} dt$ et donc $\left(\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} \right)^2 = 4 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} \sin^2(nt)}{n^2 t^2} dt$

On constate que la suite $\phi_n(t) = \frac{e^{-2t} \sin^2(nt)}{n^2 t^2}$ converge simplement vers 0. Une convergence dominée donne le résultat:

• ϕ_n est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $N_1(f_n)$ existe

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}^+, |\phi_n(t)| \leq e^{-2t}$ continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}^{++}$.

donc par convergence dominée

$$\lim \left(\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} \right)^2 = \lim \left(\int_0^{+\infty} \phi_n(t) dt \right) = 0$$

conclusion :

N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes

4)

- En reprenant III.2.1 avec $\int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt$ au lieu de $\int_0^x (h(t))^2 dt$ on voit que $\int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt$ admet une limite en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t}g'(t))^2 dt \leq \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$
- Ensuite dans (R) on obtient $(g(x))^2 = 2 \int_0^x f'^2 - 2 \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^x h^2$ somme d'intégrales impropres convergentes. D'où g^2 admet une limite en $+\infty$. Notons ℓ cette limite.
- Supposons que $\ell \neq 0$. Alors $h^2(x) = \frac{g^2(x)}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{x}$ ce qui contredit l'intégrabilité de h^2 ($f \in E_2$). Donc $\ell = 0$. Et donc

$$g(t) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$$