

Problème "Transformée de Laplace"

Partie I:

$t \mapsto e^{t\beta}$ est CT sur $[0, \infty[$.

$$|e^{t\beta}| = e^{t \operatorname{Re}(\beta)}$$

$$\int_0^x e^{t \operatorname{Re}(\beta)} dt = \begin{cases} -\frac{1}{\operatorname{Re}(\beta)} [e^{t \operatorname{Re}(\beta)}]_0^x & \text{si } \operatorname{Re}(\beta) \neq 0 \\ x & \text{si } \operatorname{Re}(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{t \operatorname{Re}(\beta)} dt < \infty \iff \operatorname{Re}(\beta) > 0$$

$\Rightarrow t \mapsto e^{t\beta}$ est intégrable $[0, \infty[$ si $\operatorname{Re}(\beta) > 0$

e) a) $e^{t\beta} = \cos(ty) + i \sin(ty)$
 si $y \neq 0$, $t \mapsto \cos(ty)$ n'est pas bornée
 et $t \mapsto \sin(ty)$ " " "

si $y = 0 \Rightarrow e^{it\beta} = 1 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$
 Donc $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{it\beta}$ n'existe pas $\Leftrightarrow y \neq 0$

b) si $\operatorname{Re}(\beta) > 0 \Rightarrow t \mapsto e^{t\beta}$ est

intégrable $[0, \infty[\Rightarrow \int_0^\infty e^{t\beta} dt < \infty$

• Soit $x > 0$, $\int_0^x e^{t\beta} dt$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\beta} (e^{x\beta} - 1) & \text{si } \beta \neq 0 \\ x & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

• si $\operatorname{Re}(\beta) < 0 \Rightarrow |e^{x\beta}| = e^{x \operatorname{Re}(\beta)}$
 $\Rightarrow e^{x\beta} \rightarrow 0$ car $\operatorname{Re}(\beta) < 0$
 $\Rightarrow \int_0^\infty e^{t\beta} dt$ existe

si $\operatorname{Re}(z) = 0 \Rightarrow z = iy$
 • si $z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow \int_0^x e^{it} dt = x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-tz} dt$ div

si $\int_0^x e^{-tz} dt = \frac{1}{iz} (1 - e^{-iyx})$ n'admet pas de limite d'après a)

Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-tz} dt$ existe dans $\mathbb{C} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$

3) $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $\int_0^{\infty} e^{-tz_0} f(t) dt$ cv.
 soit $z \in \mathbb{C}$ tq $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$.

On a $F(x) = \int_0^x e^{-zt} f(t) dt, x \geq 0$

• $t \mapsto e^{-zt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow x \mapsto F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus on a. F continue sur $[0, \infty[\subset \mathbb{C}$.
 et $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \int_0^{\infty} e^{t\lambda} f(t) dt$ $\exists$ dans $\mathbb{C}$

Alors F est bornée $\rightarrow \exists M \geq 0$ tq.

$$|F(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

b) $t \mapsto e^{(z-z_0)t}$. $F(t)$ est continue sur $[0, \infty[$
 et $|e^{(z-z_0)t} F(t)| \leq M \cdot e^{(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0))t}$
 or $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0) > 0 \Rightarrow t \mapsto e^{(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0))t}$
 est intégrable sur $[0, \infty[$ (d'après 1).
 $\Rightarrow t \mapsto e^{(z-z_0)t} F(t)$

c) $(z-z_0) \int_0^{\infty} e^{t(z-z_0)} F(t) dt$
 $u = F(t) \rightarrow u'(t) = F'(t) = e^{zt} f(t)$ (CV)
 $v = (z-z_0) e^{t(z-z_0)} \rightarrow 0 = e^{t(z-z_0)}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(z-z_0)t} F(t) = 0$$

$\downarrow$
 borné

$$(e^{(z-z_0)t})' = e^{(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0))t}$$

Donc $\int_0^{\infty} e^{t(z-z_0)} f(t) dt$ CV et

$$(z-z_0) \int_0^{\infty} \underbrace{e^{t(z-z_0)} F(t)}_{\text{Intégr}} dt = \underbrace{\int_0^{\infty} e^{t(z-z_0)} f(t) dt}_{CV}$$

4) $f_d(t) = e^{dt}$, $d \in \mathbb{C}$.

$$L(f_d) = \int_0^{\infty} e^{dt} f(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(z-d)t} dt \text{ CV } \text{ssi } \operatorname{Re}(z-d) > 0 \text{ (d'après e)}$$

$$\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(d)$$

$$\Rightarrow D(L(p_a)) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(a)\}$$

$$\forall z \in D(L(p_a)); L(p_a)(z) = \frac{1}{z-a}$$

$$* C(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt \text{ cv}\}$$

$$5) \sigma(f) \in \mathbb{R}.$$

$$\text{"inf. } C(f)$$

$$\text{Snt } x > \sigma(f) \Rightarrow \exists x_0 \in C(f) \mid \sigma(f) \leq x_0 < x.$$

$x > x_0$, d'après 3/.

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt \text{ (cv) et } \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} f(t) dt = (x - x_0) \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} f(t) dt.$$

$$\text{avec } F(t) = \int_0^x e^{-xt} f(t) dt$$

$$\Rightarrow L(f) \text{ est définie sur }]\sigma(f), \infty[$$

$$6) \text{ } \mathcal{L}_q L(f) \text{ est continue sur }]\sigma(f), \infty[$$

$$\text{Snt } [a, b] \subset]\sigma(f), \infty[. \text{ } \mathcal{L}_q L(f) \text{ est continue sur } [a, b].$$

$$\text{a. } a > \sigma(f) \Rightarrow \exists x_0 \in C(f) \mid \sigma(f) \leq x_0 < a.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt = (x - x_0) \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} f(t) dt$$

$$x \mapsto (x-x_0) \text{ est } C^1 \text{ sur } [a,b]$$

$$Pq. x \mapsto \int_0^\infty e^{-(x-x_0)t} F(t) dt \text{ est } C^1$$

$$\forall t \in [0, \infty[; x \mapsto g(x,t) = e^{-(x-x_0)t} F(t) \text{ est } C^1 \text{ sur } [a,b]$$

$$\forall x \in [a,b]; t \mapsto g(x,t) \text{ est } C^1 \text{ et}$$

$$\text{intégrable sur } [0, \infty[\text{ car d'après 3-6 } (x > x_0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t e^{-(x-x_0)t} F(t)$$

$$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \text{ est } C^1 \text{ sur } [0, \infty[$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| \leq t e^{-(x-x_0)t} = \varphi(t), \forall x \in [a,b]$$

$$\varphi \text{ est } C^1, \text{ positif et intégrable sur } [0, \infty[$$

$$\text{car } \varphi(t) = 0 \text{ (à } x_0)$$

$$\text{Donc } x \mapsto \int_0^\infty e^{-(x-x_0)t} F(t) dt \text{ est } C^1$$

$$\text{Alors } L(f) \text{ est } C^1 \text{ sur } [a,b]$$

$$\forall [a,b] \subset]\sigma(f), \infty[$$

$$\text{Donc } L(f) \text{ est } C^1 \text{ sur }]\sigma(f), \infty[$$

$$\text{et } \forall x > \sigma(f)$$

$$L(f)'(x) = \int_0^\infty e^{-(x-x_0)t} F(t) dt$$

$$- (x-x_0) \cdot \int_0^\infty t e^{-(x-x_0)t} F(t) dt$$

$$\text{Ipp } C^1$$

$$u = e F(t) \rightarrow u'(t) = F(t) + t e^{-x_0 t} F(t)$$

$$u' = -(x-x_0) e^{-(x-x_0)t} F(t) \rightarrow u(t) = e^{-(x-x_0)t} F(t)$$

$$t \cdot F(t) e^{-(x-x_0)t} = 0$$

$$- (x-x_0) \cdot \int_0^\infty t e^{-(x-x_0)t} F(t) dt = - \int_0^\infty t e^{-(x-x_0)t} F(t) dt$$

$$(L(f))'(x) = - \int_0^{\infty} t e^{-xt} f(t) dt, \forall x > \sigma(f)$$

b) tq par récurrence, $k \in \mathbb{N}^*$

$$(L(f))^{(p)}(x) = \int_0^{\infty} (-1)^p t^p e^{-xt} f(t) dt.$$

Pour $p=1$, le résultat est vrai, d'après

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposez $(L(f))^{(p)} = \int_0^{\infty} (-1)^p t^p e^{-xt} f(t) dt; \forall x > \sigma(f)$

Montrons le résultat pour $p+1$.

$$\text{ona. } (L(f))^{(p+1)} = (-1)^{p+1} \int_0^{\infty} t^{p+1} e^{-xt} f(t) dt = (-1)^{p+1} L(g)(x).$$

$$\text{ona. } \int_0^{\infty} e^{-xt} g(t) dt < \infty, \forall x > \sigma(g)$$

$$\Rightarrow \sigma(g) < \sigma(f)$$

$$\Rightarrow \forall x > \sigma(g); L(g) \text{ est dérivable.}$$

$$(L(g))'(x) = - \int_0^{\infty} t e^{-xt} g(t) dt$$

Donc $\forall x > 0$

$$(L(f))^{(p+1)}(x) = (-1)^{p+1} \int_0^{\infty} t^{p+1} e^{-xt} f(t) dt$$

8) on a $0 \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow v(w) \leq 0$

Partie II:

1) hyp $L(f)(0)$ existe $\Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(t) dt < \infty$.

$\Rightarrow v(f) \leq 0$

2) $L(f)(x) - L(f)(0) = x \int_0^{\infty} e^{-xt} F(t) dt - L(f)(0)$

avec $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

on $\int_0^{\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow L(f)(x) - L(f)(0) = x \left(\int_0^{\infty} e^{-xt} F(t) dt - L(f)(0) \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{1}{x} dx \right)$
 $= x \int_0^{\infty} e^{-xt} (F(t) - L(f)(0)) \frac{1}{x} dx = 0$

b) $u = xt$
 $\Rightarrow (L(f)(x) - L(f)(0)) = \int_0^{\infty} e^{-u} (F(\frac{u}{x}) - L(f)(0)) \frac{1}{x} du$

$\forall x > 0; u \mapsto e^{-u} F(\frac{u}{x}) - L(f)(0) \in C \cap \text{un } [0, \infty[$

$\forall u > 0; \lim_{x \rightarrow \infty} F(\frac{u}{x}) = \int_0^{\frac{u}{x}} f(t) dt = L(f)(0)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-u} (F(\frac{u}{x}) - L(f)(0)) = 0$

$\forall x > 0; |e^{-u} (F(\frac{u}{x}) - L(f)(0))| \leq e^{-u} (1 + L(f)(0))$

La fonction $u \mapsto e^{-u}$ est C^1 , positive et limite en $0, \infty$ est 1, 0.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} L(f)(x) - L(f)(0) = 0$

Autrement.

$$\text{puis } \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = L(f)(0)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tel } \forall t > A; |F(t) - L(f)(0)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |L(f)(x) - L(f)(0)| \leq \left| x \int_0^A e^{-xt} (F(t) - L(f)(0)) dt \right| + \underbrace{x \int_A^\infty e^{-xt} |F(t) - L(f)(0)| dt}_{\leq \varepsilon} \leq \varepsilon.$$

$$\leq x \cdot \underbrace{\int_0^A |F(t) - L(f)(0)| dt}_{\leq 1} + \varepsilon.$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_0^A |F(t) - L(f)(0)| dt = 0 \Rightarrow \exists \alpha > 0 \text{ tel } \forall x \in]0, \alpha[$$

$$x \int_0^A |F(t) - L(f)(0)| dt < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel } \forall x \in]0, \alpha[; |L(f)(x) - L(f)(0)| < \varepsilon.$$

$$e) \lim_{t \rightarrow \infty} t f(t) = 0$$

a) Soit $x > 0$; $t \mapsto e^{xt} f(t)$ continue sur $[0, \infty[$

ou $t \mapsto t f(t)$ continue sur $[0, \infty[$.
 $\lim_{t \rightarrow \infty} t f(t) = 0$

$\Rightarrow t \mapsto t f(t)$ est bornée par π

Autre: $|e^{xt} f(t)| \leq \frac{e^{xt}}{t} \cdot \pi = o\left(\frac{1}{t}\right)$

$\Rightarrow t \mapsto e^{xt} f(t)$ intégrable sur $[0, \infty[$.

$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{xt} f(t) dt < \infty, \forall x > 0$
 $\Rightarrow M(x) < \infty$

b) Rq $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\int_0^a |t f(t)| dt}{a} = 0$

ou $\lim_{t \rightarrow \infty} |t f(t)| = 0$

$\Leftrightarrow |t f(t)| = o(1)$

et $\int_0^a 1 dt \xrightarrow{\text{div}} \infty \Rightarrow \int_0^a |t f(t)| dt = o\left(\int_0^a 1 dt\right) = o(a)$
 $\Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\int_0^a |t f(t)| dt}{a} = 0$

d) $|L(f)(x) - \int_0^a f(t) dt| = \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt - \int_0^a f(t) dt \right|$
 $\leq \int_0^a (1 - e^{-xt}) |f(t)| dt + \int_a^{\infty} e^{-xt} |f(t)| dt$
 $\leq \int_0^a t |f(t)| dt + \int_a^{\infty} \frac{1}{t} |f(t)| dt$

$$\leq x \int_0^a t |f(t)| dt + \sup_{t \geq a} |t f(t)| \cdot \frac{1}{a} \int_a^\infty e^{-xt} dt$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

$$\leq x \int_0^a t |f(t)| dt + \frac{1}{ax} \sup_{t \geq a} |t f(t)|$$

$0(0) f(t)$

c) pour $a = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$.

$$\Rightarrow |L(f)(\frac{1}{a}) - \int_0^a f(t) dt| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |t f(t)| dt + \sup_{t \geq a} |t f(t)|$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a f(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0} L(f)(\frac{1}{a}) = \lim_{x \rightarrow \infty} L(f)(\frac{1}{x}) \quad \text{so can } \lim_{t \rightarrow \infty} t f(t) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(t) dt \subset \cup \int_0^a f(t) dt = L(f)(0) \quad \exists \text{ limite}$$