

Intégrales à paramètre

Exercice 1 .

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

2) Montrer que $x \mapsto f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est constante

3) Dédurre que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 2 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt$.

1) Montrer que F est bien défini et continue sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, F''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt$$

3) Montrer que $\forall x > 0, \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt = \frac{x}{x^2 + 4}$.

4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$.

5) Donner l'expression de $F(x), \forall x > 0$, puis déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

6) Justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et donner sa valeur.

Exercice 3 Soit $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1) Montrer que le domaine de définition de G est $[0, +\infty[$.

2) Montrer que G est continue sur $[0, +\infty[$.

3) Montrer que G est de classe sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Exercice 4 1) Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $\frac{\text{Log}(t)}{t+x}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

On pose alors $f(x) = \int_0^1 \frac{\text{Log}(t)}{t+x} dt, x > 0$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer que pour tout $x > 0, f'(x) = \frac{\text{Log}(1+x) - \text{Log}(x)}{x}, x > 0$.

4) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}(\text{Log} x)^2 + 2f(1).$$

5) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $I_k = \int_0^1 t^k \text{Log}(t) dt$.

b) Montrer pour tout $x \geq 1, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{x^n}$.

c) Montrer que $f(x) \sim_{+\infty} -\frac{1}{x}$.

d) En déduire un équivalent simple de f au voisinage de 0.

Exercice 5 1) Soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^n g(t) dt$$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

a) Déterminer D_f le domaine de définition de f et montrer que f est continue sur D_f .

3) Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$ pour $x \in D_f$. En déduire un développement à deux termes de $f(x)$ au voisinage de (-1) .

3) a) Montrer pour $x \in D_f, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$.

b) Etablir pour $|x| < 1$ on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k x^k$

avec $\forall k \in \mathbb{N}, I_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{(\text{log} t)^k}{1+t} dt$.

c) Montrer que $I_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{k!} \int_0^1 t^n (\text{log} t)^k dt$.

d) On pose $J_{n,k} = \int_0^1 t^n (\text{log} t)^k dt$. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_k = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}}$$

Problème

Partie I

1) Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$

Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$

2) Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

3) Calculer $\Gamma(1)$ et donner $\Gamma(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$

4) a) Pour tout réel t strictement positif, on définit la fonction h_t par :

$$h_t(x) = t^{x-1}e^{-t}, \forall x \in]0, +\infty[$$

Déterminer, suivant les valeurs de t , les variations de h_t

b) En déduire que : $\forall x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$

$$t^{x-1}e^{-t} \leq \varphi(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

c) Montrer que Γ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $k \in \{1, 2\}$

$$\forall x > 0, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\log(t))^k dt$$

Partie II

1) On pose

$$L_c^2(]0, +\infty[) = \{f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continue tel que } f^2 \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[\}$$

a) Montrer que si f et g sont dans $L_c^2(]0, +\infty[)$, alors $f.g$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) Dédire que $L_c^2(]0, +\infty[)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2)a) Montrer que l'application

$$\langle, \rangle : L_c^2(]0, +\infty[) \times L_c^2(]0, +\infty[) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$$

définit un produit scalaire.

b) Dédire que si f et g sont dans $L_c^2(]0, +\infty[)$, alors

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2(x) dx \right) \left(\int_0^{+\infty} g^2(x) dx \right)$$

3) Montrer que

$$\forall x > 0, (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

4)a) Vérifier que $\Gamma(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$

On pose $\forall x > 0, \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

b) Montrer que ψ est croissante.

5) En remarquant que $(\text{Log}\Gamma)' = \psi$, Montrer que

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$$

6) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$R(X) = \frac{1}{X^2 - \alpha^2}$ puis en déduire que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)) - \frac{1}{2\alpha} (\psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha))$$

7) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leq \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$

(Ind : utiliser la monotonie de ψ et le fait que $\alpha \in]0, 1[$)

8) Conclure que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)).$$