

Série II : Intégrales à paramètres

Exercice 1 On considère la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de f' .
b) Déduire l'expression de f sur $]0, +\infty[$.
3. Pour $t > 0$, on pose $G(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.
a) Montrer pour $x > 0$,

$$f(x) - f(0) = - \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du.$$

- b) Déduire que f est continue en 0 et que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 "Etude de la fonction gamma d'Euler".

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de Γ est $]0, +\infty[$.
2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$.
4. a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$ et que $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}$.
(On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
5. Montrer que Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.
6. a) Montrer que Γ' s'annule en un unique point $\alpha \in]1, 2[$.
b) En déduire les variations de Γ sur $]0, +\infty[$.
7. a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\Gamma(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.
8. Esquisser une représentation graphique de la fonction Γ .

Exercice 3 On désigne par f une fonction à valeurs complexes continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et on étudie la fonction $\mathcal{F}(f)$ (dite transformée de Fourier définie par :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x t} f(t) dt.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction est de classe C^p sur $\mathbb{R}$ et donner $(\mathcal{F}(f))^{(k)}, \forall 1 \leq k \leq p$.

4. a) Vérifier si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, tel que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si f est de classe C^p et $1 \leq k \leq p$ $f^{(k)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f)^{(k)}(x) = (2\pi i x)^k \mathcal{F}(f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. On suppose dans cette question seulement que $f(t) = e^{-\pi t^2}$.

a) Justifier que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\mathcal{F}(f)'(x) = -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-2\pi i x t} f(t) dt$$

c) Exprimer la fonction $\mathcal{F}(f)'$ à l'aide de $\mathcal{F}(f)$.

d) Déduire l'expression de $\mathcal{F}(f)$ sur $\mathbb{R}$.

(On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

7. On suppose dans cette question seulement que $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) Justifier que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\pi x \mathcal{F}(f)(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{e^{-2\pi i x t}}{(1+t^2)^2} dt$

c) Déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{F}(f)(x) = 0$.

d) Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^2 et que $\forall x > 0$, $\mathcal{F}(f)''(x) = 4\pi^2 \mathcal{F}(f)(x)$ puis donner l'expression de $\mathcal{F}(f)(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

8. On munit l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ de la norme N_1 définie par :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), N_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

On munit l'espace vectoriel $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}$ de la norme N_∞ définie par :

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}), \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

a) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: (L^1(\mathbb{R}), N_1) \longrightarrow (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}(f) \end{aligned}$$

est continue.

b) Déduire que $\sup_{N_1(f)=1} \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$ existe et donner sa valeur.

Exercice 4 "Transformer de Laplace"

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$, $\forall x > 0$.

1) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est définie continue sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

3) On suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l \neq 0$.

Montrer que alors $\mathcal{L}(f)(x) \sim \frac{l}{x}$

4) Montrer que si f est bornée, alors $\mathcal{L}(f)$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5 Soit x un réel strictement positif et $y \in \mathbb{R}$. On note f_{xy} l'application définie par :

$$f_{xy}(t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt} \cos(yt)}{t}, \quad \forall t > 0.$$

1. Montrer que f_{xy} est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $t > 0$.

Montrer que $0 \leq 1 - \cos(yt) \leq |y|t$.

En déduire que $|f_{xy}(t)| \leq \frac{|e^{(x-1)t} - 1|}{t} + |y|$.

3. On pose $F(x, y) = \int_0^{+\infty} f_{xy}(t) dt$ et pour $x > 0$,

$$F_x(y) = F(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que F_x est continue. (On pourra distinguer $t > 1$ et $t < 1$).

4. Montrer que F_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer F'_x .

5. (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{x\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

(b) En déduire $F_x(0)$ puis $F(x, y)$.

Exercice 6 Soit $\lambda \in]1, +\infty[$ et $\alpha = \frac{1}{\lambda}$. On suppose connu le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda + 1} = \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

1. Montrer que la fonction $t \rightarrow g(t, x) = \frac{\exp(-xt^\lambda)}{1 + t^\lambda}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $x \in [0, +\infty[$. On note

$$F(x) = \int_0^{+\infty} g(t, x) dt, \text{ pour } x \geq 0$$

2. (a) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

(b) Déterminer la limite en $+\infty$ de F .

3. Montrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ d'une équation différentielle que l'on précisera.

4. a) Du calcul de $(F(x)e^{-x})'$ déduire la formule des compléments :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin(\alpha\pi) = \pi.$$

b) Déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 7 1. Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \cos u}{u^2 + x^2} du$$

(a) Justifier l'existence de φ .

(b) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2 + x^2} du$. En déduire que φ est bornée.

(c) Montrer que la fonction $u \rightarrow \frac{1 - \cos u}{u^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a :

$$\left| \varphi(x) - \frac{\pi}{2} \right| \leq x \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du$$

(d) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$.

2. (a) Montrer que φ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et préciser l'expression de φ' et φ'' à l'aide d'intégrales.

(b) Prouver que, pour tout couple $(x, u) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{x}{u^2 + x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{u^2 + x^2} \right) = 0$$

(c) En déduire que φ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ (E).

(d) Résoudre l'équation (E) sur $]0, +\infty[$, puis en déduire la valeur explicite de $\varphi(x)$ pour $x > 0$.

3. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \rightarrow \frac{\cos(tx)}{1 + t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1 + t^2} dt$.