

Exercice 2

Intégrales à paramètre

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt$$

On a. $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2}$ est continue sur $J_0, +\infty[$

• $x \mapsto e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2}$ " sur $[0, +\infty[$

$$\forall x \geq 0, \left| e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2} \right| \leq \left(\frac{(\sin t)^2}{t^2} \right) = \varphi(t)$$

φ est continue sur $J_0, +\infty[$ positive.

• Au v(0): $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 1 \Rightarrow \varphi$ est prolongeable

par continuité en 0 $\Rightarrow$ intégrable au v(0)

• Au v(+ ∞): $\varphi(t) \leq \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable au v(+ ∞)

D'où φ est intégrable sur $J_0, +\infty[$

$\Rightarrow (x, t) \mapsto e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2}$ vérifie (H.D.)

D'où F est définie et continue sur $[0, +\infty[$

2) Il y a F est de classe C^2 sur $J_0, +\infty[$

Soit $f(x, t) = e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2}$; $(x, t) \in (J_0, +\infty) \times J_0, +\infty[$

• $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $J_0, +\infty[$ (d'après 1))

• $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^2 sur $J_0, +\infty[$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2}$$

$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue et intégrable

$$\text{sur } J_0, +\infty[\quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t e^{-xt} \quad (\sin t)^2 \leq t^2$$

(Puisque $x > 0$ $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $J_0, +\infty[$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2}$$

$t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2}$ est continue sur $J_0, +\infty[$

• Soit $[a, b] \subset J_0, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-at}, \quad \forall x \in [a, b]$$

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est positive continue et intégrable sur $J_0, +\infty[$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ vérifie (H.D.L)

Ainsi F est de classe C^2 sur $J_0, +\infty[$

avec $\forall x > 0$:

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt$$

$$\text{Or } \cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t \Leftrightarrow \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

$$\Rightarrow F''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(\frac{1 - \cos(2t)}{2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-xt}}_{\text{intégrable}} dt - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-xt} \cos(2t)}_{\text{intégrable}} dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt$$

3) Soit $x > 0$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{2it} dt \right)$$

$$\text{ou } \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{2it} dt = \int_0^{+\infty} e^{(2i-x)t} dt$$

$$= \frac{1}{(2i-x)} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{(2i-x)y}}{(2i-x)} - \frac{1}{(2i-x)} \right]$$

$$= \frac{1}{2i-x} \cdot \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{(2i-x)y} - 1 \right)$$

$$\text{ou } |e^{(2i-x)y}| = e^{-xy} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{(2i-x)y} = 0$$

$$\text{Ainsi } \int_0^{+\infty} e^{(2i-x)t} dt = \frac{1}{x-2i} = \frac{x+2i}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt = \frac{x}{x^2+4}$$

4) Pq $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

1^{ère} méthode. $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

2^{ème} méthode

Soit $a > 0$, $x \in [a, +\infty[$.

$t \mapsto e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}$

$\forall t > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = 0$

$$\left| \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 e^{-xt} \right| \leq e^{-at} \text{ (puisque } \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{a^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C})$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = 0$$

→ Pq $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$

$$\text{On a } F'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$$

$t \mapsto e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}$

$\forall t > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = 0$

$|e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2| \leq t e^{-at} \quad (\left| \sin t \right| \leq t)$

La fonction $t \mapsto t e^{-at}$ est continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}$ ($x \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = - \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$$

$$= 0$$

5) D'après 2/et 3/

$$\forall x > 0; F''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow F'(x) = c_1 + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2+4)$$

$$\text{ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$$

$$= c_1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)^{1/4}} \right) = c_1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)^{1/4}} \right)^{1/4} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^{1/4}} = 1 \rightarrow 1$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2+4)$$

$$\Rightarrow F(x) = cte + \frac{1}{2} (x \ln x - x) - \frac{1}{4} \int \ln(x^2+4) dx$$

$$\text{or } \int \ln(x^2+4) dx \quad \left(\begin{array}{l} u = \ln(x^2+4) \quad u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{x^2+4} \quad v = x \end{array} \right)$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} x \ln(x^2+4) - 2 \int \frac{x^2}{x^2+4} dx$$

$$= x \ln(x^2+4) - 2 \int \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right) dx$$

$$= x \ln(x^2+4) - 2x + \frac{8}{2} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + cte$$

Alors

$$F(x) = cte - \frac{1}{4} x \ln(x^2+4) + \frac{x}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \ln x - \frac{x}{2}$$

$$= cte - \frac{1}{4} x \ln(x^2+4) + \frac{1}{4} x \ln x^2 - \operatorname{Arctg} \frac{x}{2}$$

$$\text{or } = cte + \frac{1}{4} x \ln \frac{x^2}{x^2+4} - \operatorname{Arctg} \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 = cte + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} x \ln \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right) - \operatorname{Arctg} \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{or } x \ln \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right) = x \ln \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right)$$

$$\sim_{+\infty} -\frac{4x}{x^2+4} \sim -\frac{4}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = cte - \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow cte = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi : $F(x) = \frac{x}{4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right) + \frac{\pi}{2}, \forall x > 0$

5) D'après 1/ F est continue sur $[0, +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x}{4}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\ln x}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{\frac{x}{4} \ln(x^2+4)}_{\rightarrow 0} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $F(0) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

On a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

$\Rightarrow t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0. De plus elle est continue sur $]0, +\infty[$, alors $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ cv ①

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt =$$

$$\text{IPP} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left[\frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \right) \begin{matrix} u=1/e \\ u'=-1/t^2 \\ v=-\ln t \end{matrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$\text{or } \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \text{ qui est intégrable au } v(+\infty)$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \text{ existe}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ } \exists \text{ et finie}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ CV. } \textcircled{c}$$

$$\textcircled{d} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ CV.}$$

$$\text{* On a } \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{IPP. } \begin{matrix} u = (\sin t)^2 & u' = 2 \sin t \cos t \\ v' = 1/t^2 & v = -1/t \end{matrix}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow +\infty}} \left[-\frac{(\sin t)^2}{t} \right]_x^y = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\sin y)^2}{y} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$$

$$\bullet ((\sin y)^2) \text{ borné} \Rightarrow \frac{(\sin y)^2}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$$

$$\bullet (\sin x)^2 \sim x^2 \Rightarrow \frac{(\sin x)^2}{x} \sim x$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow 0}} \left[-\frac{(\sin t)^2}{t} \right]_x^y = 0$$

$$\text{Ainsi: } \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin t \cos t}{t} dt$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt$$

$$\left[\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \right] \quad (u=2t)$$

Exercice 4

Soit $x > 0$
 La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t+x}$ est continue

sur $]0, t[$.

$$\text{Au } v(0): \sqrt{t} \left| \frac{\ln t}{t+x} \right| \sim \sqrt{t} |\ln t| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\ln t}{t+x} \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

$$\text{or } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}} \text{ est intégrable au } v(0)$$

$$\Rightarrow t \mapsto \frac{\ln t}{t+x} \text{ est intégrable au } v(0)$$

$$\text{et par suite } t \mapsto \frac{\ln t}{t+x} \text{ est intégrable sur }]0, 1[.$$

ηg est C^1 sur $]0, +\infty[$.
 Soit $g(x, t) = \frac{\ln t}{t+x}$; $t \in]0, 1]$
 $x \in]0, +\infty[$.
 $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, 1]$

$x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $]0, 1]$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{\ln t}{(t+x)^2}$$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, 1]$

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$ ($0 < a < b < \dots$)

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln t|}{(t+a)^2} = \varphi(t), \quad \forall x \in [a, b]$$

φ est continue, positive sur $]0, 1]$
 et intégrable sur $]0, 1]$

$$\left(\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \cdot \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t} |\ln t|}{(t+a)^2} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Ce qui montre que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$: $g'(x) = \int_0^1 -\frac{\ln t}{(t+x)^2} dt$

IPP : $u = \ln t$

$$u' = \frac{1}{t}$$

$$v' = -\frac{1}{(t+x)^2}$$

$$v = \frac{1}{t+x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\ln t \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \ln t \left(-\frac{t}{(t+x)x} \right) = -\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$$

Alors

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{-t}{(t+x)^2} dt$$

$$= -\frac{1}{x} \left[\ln(t+x) \right]_0^1$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x} (\ln(1+x) - \ln x); \quad \forall x > 0$$

4) Soit $x > 0$,

ηg $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} (\ln(x))^2 + 2f(1)$

soit $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} (\ln(x))^2, x > 0$

g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{x} (\ln(1+x) - \ln x)$$

$$- \frac{1}{x^2} \left(x (\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(\frac{1}{x})) \right) + \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \ln(1+x) - \frac{1}{x} (\ln(x+1) - \ln x + \ln x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0, \quad \forall x > 0$$

$$\text{D'où } g(x) = cte = g(1), \quad \forall x > 0$$

$$= 2f(1)$$

5) $q \ k \in \mathbb{N}^*$

$$I_k = \int_0^1 t^k (\ln t) dt \quad u = \ln t \quad u' = \frac{1}{t}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^k}{k+1} dt$$

$$= - \int_0^1 \frac{t^k}{k+1} dt = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

b) Soit $x > 1$.

$$\Rightarrow 0 < \frac{t}{x} < 1; \quad \forall 0 < t < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{t+x} = \frac{\ln t}{x(1+\frac{t}{x})} = \frac{\ln t}{x} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{t}{x}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} t^n \ln t$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} t^n \ln t dt$$

Justification $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \int_0^1 t^n \ln t dt$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n^2}$$

Justification de $\otimes$

Soit $f_n(t) = (-1)^n \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}}; \quad n \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $]0,1[$ et intégrable.

Car: $|f_n(t)| \leq |\ln t|$ qui est intégr.

La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ c.s sur $]0,1[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t+x}$ (par construction)

$t \mapsto \frac{\ln t}{t+x}$ est continue sur $]0,1[$.

Il y a la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(t)| dt$ cv.

$$\text{on a } \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 \left| \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}} \right| dt = - \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}} dt = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{1}{x^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)| dt \leq \frac{1}{(n+1)^2} \quad (x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1)$$

D'où $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(t)| dt$ cv

Alors la permutation est justifiée par le TIA

c) Il y a $f(x) \sim -\frac{1}{x}$.

$$\text{on a } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n^2} \cdot \frac{1}{x^n} = -\frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \cdot \frac{1}{x^n} \Rightarrow x \cdot f(x) = -1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$$

montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$

Soit $q_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{x^{n-1}}$, $x \in [1, +\infty[$

• $\forall n \geq 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} q_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$

• $|q_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$; $\forall x \in [1, +\infty[$

$\sup_{x \in [1, +\infty[} |q_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ cv, alors la série $\sum_{n \geq 2} q_n \subset \mathcal{N} \Rightarrow \text{CU sur } [1, +\infty[$

D'après le th de permutation Σ et lin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$$

Ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = -1$
 $\Leftrightarrow \left| f(x) + \frac{1}{x} \right| \rightarrow 0$

d) On a $f(x) \sim_{+\infty} -\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{0^+} -x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\frac{1}{2}(\ln x)^2} = 0$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} \stackrel{+1+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{=} \frac{1}{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} \stackrel{7}{=}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim_{0^+} -\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Exercice 5

$g:]0,1[\rightarrow \mathbb{C}$ c.n et intégrable

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n g(t) dt$$

$$= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) dt$$

avec $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k g(t)$ $t \in]0,1[$
 $= \left(\frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \right) g(t)$

• $\forall n \in \mathbb{N}$; g_n est c.n sur $]0,1[$

• $S_n \subset \mathcal{S} \rightarrow t \mapsto \frac{g(t)}{1+t}$ sur $]0,1[$

• $\forall n \in \mathbb{N}$; $|S_n(t)| \leq \frac{1+|t|^{n+1}}{1+t} |g(t)|$

$$\leq \frac{2}{1+t} |g(t)| \leq 2|g(t)|$$

La fonction $|g|$ est c.n positive et intég sur $]0,1[$.

Alors d'après le T.C.D.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k g(t) dt \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^k g(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k t^k g(t) dt$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{g(t)}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k t^k g(t) dt.$

2) $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$

a) $t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0,1[$ et positive.

au v(0) $\frac{t^x}{1+t} \sim_0 t^x = \frac{1}{t^{-x}}$

$\Rightarrow t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est intégrable au v(0)
SSI $t \mapsto \frac{1}{t^{-x}}$ est intégrable
 SSI $-x < 1 \Leftrightarrow x > -1$

Ainsi $Df =]-1, +\infty[.$

* Montrons que f est continue sur $]-1, +\infty[$

Soit $h(x, t) = \frac{t^x}{1+t}$; $x \in]-1, +\infty[$
 $t \in]0, 1[$

$\cdot t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0, 1[$

$\cdot x \mapsto h(x, t)$ " " sur $]-1, +\infty[$

Soit $[a, b] \subset]-1, +\infty[$ ($-1 < a < b$)

On a $\ln t \leq 0 \Rightarrow$ la fonction
 $x \mapsto t^x = e^{x \ln t}$ est décroissante.

$$\Rightarrow |h(x, t)| = \left| \frac{t^x}{1+t} \right| \leq \frac{t^a}{1+t} ; \forall x \in [a, b]$$

or $t \mapsto \frac{t^a}{1+t}$ est continue, positive et
 intégr sur $]0, 1[$ ($x=a > -1$)

Alors d'après le théorème de continuité

la fonction $f: x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ est
 continue sur $]-1, +\infty[.$

$$\begin{aligned} 3) f(x+1) &= \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^x (t+1-1)}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x+1} - f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\star f(x) = \frac{1}{x+1} - f(x+1)$$

or $\lim_{x \rightarrow -1} f(x+1) = f(0)$ car f est continue en 0

$$\Leftrightarrow f(x+1) = f(0) + o(1)$$

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2.$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(2) + o(1)}$$

soit $x \in D_f =]-1, +\infty[$.

D'après 1/ on pose $g(t) = t^x$ qui est continue et intégrable sur $]0, 1[$.

Alors
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^n \cdot t^x dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n+x} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}; |x| < 1$.

On a $t^x = e^{x \ln t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln t)^n}{n!}$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x \ln t)^k}{k! (1+t)} dt$$

① a' justification
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} I_k x^k \quad \text{avec } I_k = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{k! (1+t)} dt$$

Justification de ① Soit $h_k(t) = \frac{x^k (\ln t)^k}{k! (1+t)}$; $t \in]0, 1[$

$\forall k \in \mathbb{N}$ h_k est continue sur $]0, 1[$ et intégrable sur $]0, 1[$ car au $v(0)$;

$$\forall \epsilon, |h_k(t)| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ \forall k \in \mathbb{N}}} 0$$

$$\Rightarrow h_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ \forall k \in \mathbb{N}}} 0$$

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} h_k$ C.S. $t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ qui est une fonction continue sur $]0, 1[$.

Req. la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 |h_k(t)| dt$ CV

On a
$$\int_0^1 |h_k(t)| dt = \int_0^1 \frac{|x|^k |\ln t|^k}{k! (1+t)} dt$$

$$= \frac{|x|^k}{k!} \int_0^1 \frac{(-\ln t)^k}{1+t} dt$$

$$= \frac{|x|^k}{k!} \int_{-\infty}^0 \frac{u^k}{1+e^u} (-e^u du) \quad \text{On pose } u = -\ln t$$

$$= \frac{|x|^k}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{u^k e^{-u}}{1+e^{-u}} du$$

$$\leq \frac{|x|^k}{k!} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du \quad (1+e^{-u} \geq 1)$$

$$\leq \frac{|x|^k}{k!} \cdot \Gamma(k+1) = |x|^k \quad (\text{car } \Gamma(k+1) = k!)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |h_k(t)| dt \leq |x|^k$$

Comme $|x| < 1 \Rightarrow$ la série $\sum_{k \geq 0} |x|^k$ est

$\Rightarrow$ la série $\sum_{k \geq 0} \int_0^{\infty} |h_k(t)| dt$

D'où la justification de permutation.

par le T.I.T.T

$$c) I_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{(L_n t)^k}{1+t} dt$$

$$= \frac{1}{k!} \int_0^1 (L_n t)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt$$

$$= \frac{1}{k!} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n (L_n t)^k dt$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n (L_n t)^k dt$$

d'après 1) pour $g(t) = (L_n t)^k$ qui est intégrable sur $J_0,1[$.

$$d) J_{n,k} = \int_0^1 t^n (L_n t)^k dt$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (L_n t)^k \cdot t^{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned} u &= (L_n t)^k & du &= k(L_n t)^{k-1} L_n dt \\ u' &= \frac{k(L_n t)^{k-1}}{t} & u &= \frac{1}{n+1} t^{n+1} \end{aligned}$$

$$J_{n,k} = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 (L_n t)^{k-1} t^n dt$$

$$= -\frac{k}{n+1} J_{n,k-1}$$

• $J_{n,k} \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$:

car $\text{supp } J_{n,k} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 t^n (L_n t)^k dt = 0$

• $t^n (L_n t)^k$ est continue et garde un signe constant alors

$$t^n (L_n t)^k = 0, \forall t \in J_0,1[\text{ imp }$$

• Puisque $J_{n,p} = -\frac{p}{n+1} J_{n,p-1}$

$$\Rightarrow \prod_{p=1}^k J_{n,p} = \prod_{p=1}^k \left(-\frac{p}{n+1} \right) J_{n,0}$$

$$\Rightarrow J_{n,k} = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k} J_{n,0}$$

$$\text{or } J_{n,0} = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow J_{n,k} = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$$

On en déduit

$$I_k = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{k+1}} = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}}$$

problème

1) $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

Au v(0)

$t^{x-1} e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable
 si $1-x < 1$
 si $x > 0$

Au v(+∞)

$t^2 \cdot t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
 $\Leftrightarrow t^{x+1} e^{-t} = o(\frac{1}{t^2}) ; \forall x \in \mathbb{R}$
 or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intég au v(+∞)
 $\Rightarrow t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intég au v(+∞), $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\underline{\text{cl}}$ $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intég sur $]0, +\infty[$
 si $x > 0$

2) Soit $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$$

I.P.P.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} t^x e^{-t} = 0 \quad (x > 0)$$

$$\text{Alors } \Gamma(x+1) = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)}$$

$$3) \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence. $\Gamma(n+1) = n! \Gamma(1)$

$$= n!$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = (n-1)!$$

4) a) $x \mapsto h_t(x) = t^{x-1} e^{-t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, h'_t(x) = (e^{(x-1) \ln t})' e^{-t} \\ = (\ln t) \cdot e^{(x-1) \ln t} e^{-t} \\ = (\ln t) \cdot t^{x-1} e^{-t}$$

si $t \in]0, 1[\Rightarrow h'_t(x) \leq 0 \Rightarrow h_t$ est $\searrow$
 si $t \in [1, +\infty[\Rightarrow h'_t(x) \geq 0 \Rightarrow h_t$ est $\nearrow$

b) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$

$$0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1} e^{-t} \quad \text{si } t \leq 1 \quad (h_t \text{ est } \searrow) \\ \leq t^{b-1} e^{-t} \quad \text{si } t \geq 1 \quad (h_t \text{ est } \nearrow)$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t) := \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\subseteq \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

$$\text{avec } f(x, t) = t^{x-1} e^{-t} \quad \begin{matrix} x \in]0, +\infty[\\ t \in]0, +\infty[\end{matrix}$$

• $\forall x > 0$
 $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable
sur $]0, +\infty[$ (d'après 1)

• $\forall t > 0$; $x \mapsto f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ est de
classe C^2 sur $]0, +\infty[$; $\forall 1 \leq k \leq 2$
avec $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$

• $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t) t^{x-1} e^{-t}$ est
continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable
car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2}} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} = 0$
 $\Rightarrow (\ln t) t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

• au v(0).

On a $x > 0 \Rightarrow 1-x < 1$.

On considère $d \in \mathbb{R}$ tel $1-x < d < 1$ $\Rightarrow$
 $t^d |(\ln t)|^k t^{x-1} e^{-t} = |(\ln t)|^k t^{x+d-1} e^{-t} \rightarrow 0$
 $t \rightarrow +\infty$

• Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$

Alors $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq |\ln t|^2 \varphi(t)$.

or la $t \mapsto |\ln t|^2 \varphi(t)$ est C^1
positive et intégrable d'après ce qui
précède pour $\left(\begin{smallmatrix} x=a > 0 \\ \text{ou} \\ x=b > 0 \end{smallmatrix} \right)$

Ainsi Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

avec $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^k dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

$L^2_c(]0, +\infty[) = \left\{ f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continue tq } f^2 \text{ est intégrable} \right\}$

1) a) soient f et $g \in L^2_c(]0, +\infty[)$

alors $f \cdot g$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$$0 \leq |f \cdot g(x)| \leq \frac{1}{2} (f^2(x) + g^2(x))$$

Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur
 $]0, +\infty[$, alors $f \cdot g$ est intégrable sur
 $]0, +\infty[$:

b) $L^2_c(]0, +\infty[) \subset C^0(]0, +\infty[) =$ l'espace vectoriel
des fonctions continues

• $0 \in L^2_c(]0, +\infty[)$

• Soient $f, g \in L^2_c(]0, +\infty[)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + g)^2 = \underbrace{\lambda^2 f^2}_{\text{inté}} + \underbrace{g^2}_{\text{inté}} + 2 \underbrace{\lambda f \cdot g}_{\text{inté (a)}}$$

= intégrable sur $]0, +\infty[$

de plus $\lambda f + g$ est continue sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow \lambda f + g \in L^2_c(]0, +\infty[)$.

$\Rightarrow L^2_c(]0, +\infty[)$ est un s.e.v. de $C^0(]0, +\infty[)$
 $\Rightarrow$ " " est un R.e.v.

Puisque $\forall f \in L^2_c(\mathbb{J}_0, +\infty[)$
 et $g \in L^2_c(\mathbb{J}_0, +\infty[)$

ona $f \cdot g$ est intégrable, alors

l'app. l'app $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie,

c'est facile à vérifier que c'est un
 produit scalaire sur $L^2_c(\mathbb{J}_0, +\infty[)$.

b) Puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit
 scalaire, alors d'après l'inégalité
 de Cauchy Schwarz,

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2.$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_0^{+\infty} |g(x)|^2 dx$$

$$\begin{aligned} 3) \quad (\Gamma'(x))^2 &= \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t) dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \right) \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \ln t \right) dt \right)^2 \\ &\stackrel{\text{d'après 2-b)}}{\leq} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \cdot \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt \end{aligned}$$

(Les fonctions considérées
 $f = t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$ et $g = t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \ln t$
 sont de classe intégrables)

$$\text{Ainsi } (\Gamma'(x))^2 \leq (\Gamma(x)) \Gamma''(x)$$

$$4) \text{ a) Ona } \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{x-1} e^{-t}}_{\geq 0} dt \geq 0$$

Supposons que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = 0$$

Comme $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue
 positive et intégrable sur $\mathbb{J}_0, +\infty[$
 alors $t^{x-1} e^{-t} = 0, \forall t \in \mathbb{J}_0, +\infty[$
 ce qui est impossible.

Alors $\Gamma(x) > 0, \forall x \in \mathbb{J}_0, +\infty[$.

b) Soit $\psi(x) = \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)}$; $x > 0$

Γ et Γ' sont dérivables, alors ψ est
 dérivable sur $\mathbb{J}_0, +\infty[$.

$$\forall x > 0; \psi'(x) = \frac{\Gamma'''(x)\Gamma'(x) - (\Gamma''(x))^2}{(\Gamma(x))^2}$$

(d'après

$\Rightarrow \psi$ est croissante.

$$b) (\ln \Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x)$$

$$\text{On a } \psi(x+1) - \psi(x) = (\ln \Gamma)'(x+1) - (\ln \Gamma)'(x)$$

$$= (\ln \Gamma(x+1))' - (\ln \Gamma(x))'$$

$$= (\ln x \Gamma(x))' - (\ln \Gamma(x))'$$

$$= (\ln \Gamma(x) + \ln x)' - (\ln \Gamma(x))'$$

$$= \frac{1}{x} \Rightarrow \forall x > 0; \psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$$

$$6) \alpha \in]0, 1[.$$

$$R(x) = \frac{1}{x^2 - \alpha^2} = \frac{1}{(x-\alpha)(x+\alpha)}$$

$$= \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x+\alpha}$$

$$a = (x-\alpha)R(x)|_{x=\alpha} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$b = (x+\alpha)R(x)|_{x=-\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{x+\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n \psi(k-\alpha+1) - \psi(k-\alpha)$$

$$- \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n \psi(k+\alpha+1) - \psi(k+\alpha)$$

$$= \frac{1}{2\alpha} (\psi(n-\alpha+1) - \psi(1-\alpha))$$

$$- \frac{1}{2\alpha} (\psi(n+\alpha+1) - \psi(1+\alpha))$$

$$= \frac{1}{2\alpha} (\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha))$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} (\psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha))$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Pi_9^0 \leq \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$

On a.

$$\psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \geq 0 \text{ d'après 3/}$$

$\Rightarrow \psi$ est croissante

$$\text{Comme } \alpha > 0 \Rightarrow n+1+\alpha \geq n+1-\alpha$$

$$\Rightarrow \psi(n+1+\alpha) \geq \psi(n+1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) \geq 0$$

D'autre part :

$$\psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) =$$

$$\psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1) + \psi(n+1) - \psi(n+1-\alpha)$$

$$\text{Or } \alpha < 1 \Rightarrow n+1+\alpha \leq n+2$$

$$\text{et } \psi \text{ est } \nearrow \Rightarrow \psi(n+1+\alpha) \leq \psi(n+2)$$

$$\Rightarrow \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1) \leq \psi(n+2) - \psi(n+1)$$

$$\frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} & \text{plus} \\ & 0 < \alpha < 1 \Rightarrow 1 - \alpha > 0 \\ & \Rightarrow n+1-\alpha \geq n \Rightarrow \psi(n+1-\alpha) \geq \psi(n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(n+1) - \psi(n+1-\alpha) \leq \psi(n+1) - \psi(n) = \frac{1}{n}$$

Ainsi

$$0 \leq \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

8) D'après 7/

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) = 0$$

Ce qui nous permet de déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha))$$