

Exercice 1. 1) Écrivons $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ où $g(x,t) = e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}$. Pour $x = 0$, $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et nous retrouvons l'intégrale de Dirichlet ; pour $x > 0$, comme $|g(x,t)| \leq e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, f est encore bien définie : f est finalement définie sur $\mathbb{R}_+$.

Soit

$$|g(x,t)| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

De ces deux inégalités, le théorème de continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres assure que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$$

Remarque : il faut se garder, malgré les questions suivantes, de vouloir par ces théorèmes de domination obtenir la continuité de f à l'origine : en effet f est à l'origine définie par l'intégrale de Dirichlet qui est notoirement non absolument convergente et une domination de g dans un voisinage de l'origine impliquerait assurément l'absolue convergence. C'est pourquoi d'ailleurs les dominations n'ont lieu que sur $[a, +\infty[$...

2) L'expression de $f'(x)$ que nous venons d'obtenir nous permet un calcul explicite : soit $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt = - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{it} - e^{-it}) e^{-xt} dt \\ &= - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{t(i-x)} - e^{-t(i+x)}) dt \\ &= - \frac{1}{2i} \left(\left[\frac{e^{t(i-x)}}{i-x} \right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-t(i+x)}}{i+x} \right]_0^\infty \right) \\ &= - \frac{1}{2i} \left(0 + \frac{1}{i-x} - \frac{1}{i+x} \right) = - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(les deux termes « entre crochets » sont nuls à l'infini car par exemple $\left| \frac{e^{-t(i+x)}}{i+x} \right| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow 0$ lorsque t tends vers $+\infty$...). En intégrant cette formule, il vient

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = -\arctan(x) + C.$$

La constante C n'est pas difficile à déterminer, en effet la formule ci-dessus implique que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + C$$

et pour tout $x > 0$

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

soit

$$-\frac{\pi}{2} + C = 0 \quad \text{et} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

1

Résumons nous :

$$(X) \quad f(x) = \begin{cases} -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0 \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3) Il s'agit de montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - f(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} (e^{-xt} - 1) dt \right| = 0.$$

Cette limite n'est pas triviale, on va faire une intégration par parties : considérons pour $t > 0$, $G(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$. G est dérivable et $G'(t) = -\frac{\sin(t)}{t}$, en outre la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ implique $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} (e^{-xt} - 1) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} G'(t) (e^{-xt} - 1) dt \\ &= - [G(t) (e^{-xt} - 1)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} G(t) x e^{-xt} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du := - \int_0^{+\infty} H(x, u) du \end{aligned}$$

et la fonction

$$H(x, u) = \begin{cases} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$ (la continuité en $(0, u)$ découle de $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$) ; elle est aussi dominée par

$$|H(x, u)| \leq e^{-u} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Donc par convergence dominée

$$(V) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - f(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| - \int_0^{+\infty} H(x, u) du \right| = \left| - \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} H(x, u) du \right| = 0.$$

$\tilde{f}$ est donc bien continue à l'origine.

4) (X) et (V) donnent immédiatement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

- Au voisinage de $+\infty$:

On a $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, car $t^2 \times (t^{x-1}e^{-t}) = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

D'où le résultat. $\sim \frac{1}{e^{x-1}}$

② Montrons que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$.

- Soit $x > 0$, $t \mapsto f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Soit $t > 0$, $x \mapsto f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Soient $[c, d]$ un segment de $]0, +\infty[$ et $t > 0$.
Remarquons que, la monotonie de $x \mapsto t^{x-1} = e^{\ln(t)(x-1)}$ dépend de t . elle est décroissante sur $]0, +\infty[$ si $t \in]0, 1]$ et croissante sur $]0, +\infty[$ si $t \in]1, +\infty[$.

▷ Si $t \in]0, 1]$: $|f(x, t)| \leq t^{x-1}e^{-t} \leq t^{c-1}e^{-t}$.

▷ Si $t \in]1, +\infty[$: $|f(x, t)| \leq t^{x-1}e^{-t} \leq t^{d-1}e^{-t}$.

On conclut alors que $\forall x \in [c, d], \forall t > 0, |f(x, t)| \leq g(t)$ avec

$$g(t) = \begin{cases} t^{c-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0, 1] \\ t^{d-1}e^{-t} & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

On a g est continue par morceaux et positive sur $]0, +\infty[$.

- ◊ Au voisinage de 0 :

$g(t) = t^{c-1}e^{-t} \sim_{t \rightarrow 0^+} t^{c-1} = \frac{1}{t^{1-c}}$, puisque $1 - c < 1$, alors $t \mapsto \frac{1}{t^{1-c}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann), par le critère comparaison, g est intégrable sur $]0, 1]$.

- ◊ Au voisinage de $+\infty$:

On a $t^2 g(t) = t^2(t^{d-1}e^{-t}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit alors que g est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de continuité, on déduit que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

③ Montrons que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt$.

Pour tout $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$.

- Soit $x > 0$, $t \mapsto f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et d'après la question ①, elle est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Soit $t > 0$, $x \mapsto f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}$
et $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $[c, d]$ un segment de $]0, +\infty[$ et $t > 0$.
Remarquons que, la monotonie de $x \mapsto t^{x-1} = e^{\ln(t)(x-1)}$ dépend de t . elle est décroissante sur $]0, +\infty[$ si $t \in]0, 1]$ et croissante sur $]0, +\infty[$ si $t \in]1, +\infty[$.

▷ Si $t \in]0, 1]$: $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq |\ln(t)|^k t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln(t)|^k t^{c-1}e^{-t}$.

③

▷ Si $t \in [1, +\infty[$: $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} \leq (\ln(t))^k t^{d-1} e^{-t}$.

On conclut alors que $\forall x \in [c, d], \forall t > 0, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq g(t)$ avec

$$g(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{c-1} e^{-t} & \text{si } t \in]0, 1[\\ (\ln(t))^k t^{d-1} e^{-t} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

On a g est continue par morceaux et positive sur $]0, +\infty[$

◊ Au voisinage de 0 :

$g(t) = |\ln(t)|^k t^{c-1} e^{-t} = \underset{t \rightarrow 0^+}{o} \left(\frac{1}{t^{1-\frac{c}{2}}} \right)$, puisque $1 - \frac{c}{2} < 1$, alors $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{c}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (intégrale de Riemann), par le critère comparaison, g est intégrable sur $]0, 1[$.

◊ Au voisinage de $+\infty$:

On a $t^2 g(t) = t^2 ((\ln(t))^k t^{d-1} e^{-t}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit alors que g est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous signe intégrale, on déduit que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

④ Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Soit $x > 0$, par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^x (-e^{-t})' dt \\ &= [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

Procédons par un raisonnement par récurrence :

► Initialisation : Pour $n = 0, \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$ et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \underset{v=\sqrt{t}}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} = \frac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0} 0!} \sqrt{\pi}$$

► Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

On a

$$\Gamma(n+2) = \Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + 1\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) + 1\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2) \times 2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} (n+1)!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$



► Récurrence terminée.

⑤ Montrer que Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Comme Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, alors Γ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt \geq 0$$

Par suite Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.

⑥ Montrer que Γ' s'annule une et une seule fois en un point $\alpha \in]1, 2[$.

- Existence : on a Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

$$\text{En particulier } \begin{cases} \Gamma \text{ est continue sur } [1, 2] \\ \Gamma \text{ est dérivable sur }]1, 2[\\ \Gamma(1) = 0! = 1! = \Gamma(2) \end{cases}$$

D'après le théorème de Rolle, $\exists \alpha \in]1, 2[$, tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

- Unicité : D'après la question précédente $\Gamma'' \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, donc Γ' est croissante sur $]0, +\infty[$, d'où l'unicité de α .

Variations de Γ sur $]0, +\infty[$.

Comme Γ' est croissante sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma'(\alpha) = 0$, alors $\forall t \in]0, \alpha[$, $\Gamma'(t) \leq \Gamma'(\alpha) = 0$ et $\forall t \geq \alpha$, $\Gamma'(t) \geq \Gamma'(\alpha) = 0$.

D'où le tableau de variations de Γ sur $]0, +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$\Gamma'(x)$		0	+
$\Gamma(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x)$	$\Gamma(\alpha)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$

⑦ Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\Gamma(x) = 1$.

On a $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \Gamma(1) = 0! = 1$, car Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

Montrons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\Gamma(x) = 1$, alors $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Montrons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

Comme Γ est croissante sur $[\alpha, +\infty[$ et $\Gamma(n+1) = n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Alors Γ est croissante et non majorée $[\alpha, +\infty[$, par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

⑧ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$.

Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, alors pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$, par suite

$$\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x} \Gamma(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Interprétation graphique de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

C_Γ la courbe représentative de Γ , admet une branche parabolique de direction (OY) au voisinage

de $+\infty$.

⑨ Représentation graphique de la fonction Γ .

