

$$F(x) = \int_I f(x, t) dt, \quad x \in A.$$

T.C.D. généralisée

Remarque:

Si $\begin{cases} \text{et } |F(x)| \leq g(x), \forall x \in U(a) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{cases}$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

Ex: $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = 0$

$$|F(x)| \leq \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{e^{-xt}} dt = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$

- $a \in \bar{A}$
- $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ est C.T. sur } I$
 - $\forall t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = f(t) \text{ existe}$
 - $t \mapsto f(t) \text{ est C.T. sur } I$
 - $\exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ C.T., positive et } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$
 - $\forall x \in A, |f(x, t)| \leq \varphi(t), \forall t \in I$

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) dt = \int_I f(t) dt$$

$\forall x \in A, \forall t \in I, t \mapsto f(x, t) \text{ est C.T. sur } I$
 $\forall t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = f(t) \text{ existe}$

Th. de Derivabilité: $A \subset \mathbb{R}$

$\forall t \in A, t \mapsto f(x, t)$ est C.P. et intégrable

$\bullet \forall t \in A, t \mapsto f(x, t)$ est C^k sur A. n fois

Si $\bullet \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ est C.P. sur I

$\bullet \frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie (H.D) ou (H.D.L)

Alors $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est

C^k sur A et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Th. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est Cⁿ sur A

$\bullet \forall x \in A, \forall k \leq n; \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est C.P. intég. sur I

Si $\bullet \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est C.P. sur I

$\bullet \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ vérifie (H.D) ou (H.D.L)

Alors F est Cⁿ sur I et

$\forall x \in A, \forall k \leq n; F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$

Exp.

$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$

On Γ est continue sur $J_0, \infty[$.

Soit $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}, x > 0, t > 0$

$\bullet \forall x \in J_0, \infty[; t \mapsto f(x, t)$ est C.P.

$\bullet \forall t > 0; x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $J_0, \infty[$

Déf

* f vérifie l'hypothèse de domination (H.D.)

$\Leftrightarrow \exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathcal{M}$, positive et
 intégrable $\int \varphi < +\infty$
 $\forall x \in A; |f(x,t)| \leq \varphi(t), \forall t \in I.$

* f vérifie (H.D.L.) $\Leftrightarrow$

$\forall K \text{ compact } \subset A; \exists \varphi_K: I \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathcal{M}$
 tel que $\forall x \in K: |f(x,t)| \leq \varphi_K(t), \forall t \in I$
 et $\int \varphi_K < +\infty$

Th. de Continuité

Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A; t \mapsto f(x,t) \text{ est c.t. sur } I \\ \forall t \in I, x \mapsto f(x,t) \text{ est continue sur } A \\ f \text{ vérifie (H.D.) ou (H.D.L.)} \end{array} \right.$

Alors $F: x \mapsto \int_I f(x,t) dt$ est définie et continue sur A .

$$x \mapsto t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t} e^t \rightarrow \text{si } t \geq b \quad |$$

$$\downarrow \text{ si } t \in]0,1[$$

soit $[a,b] \subset]0, \infty[$; $\forall x \in [a,b]$.

$$|f(x,t)| \leq \varphi(t) \begin{cases} e^{a-t} e^t & \text{si } t \in]0,1[\\ t^{b-1} e^t & \text{si } t \in [1, \infty[\end{cases}$$

ou

$$\leq \varphi(t) = (t^{a-1} + t^{b-1}) e^t.$$

φ est C.D., positive et intégrable sur $]0, \infty[$.

car $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$; $\varphi(t) \sim t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$

$\Rightarrow f$ vérifie (H.D.L)

Alors Γ continue sur $]0, \infty[$.

$$\stackrel{1}{=} \frac{1}{\Gamma(1-a)}$$

19. Test ∞ sur $J_0, \infty[$.

et $\forall n \in \mathbb{N}$; $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (Lnt)^n e^{x-1} e^{-t} dt, \forall x > 0$

$\forall t > 0$; $x \mapsto f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ est ∞ sur $\mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = (Lnt)^n t^{x-1} e^{-t}$

$t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est C. D. sur $J_0, \infty[$.

Soit $[a, b] \subset J_0, \infty[$ ($a > 0$)

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_n(t) = \begin{cases} (Lnt)^n t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \in J_0, a] \\ (Lnt)^n t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \in]b, \infty[\end{cases}$$

φ_n est C. D., positive et continue sur $J_0, \infty[$.

cas $\frac{a+b}{2} = a$, $\varphi_n(t) = (Lnt)^n t^{a-1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$
 cas $\frac{a+b}{2} = b$, $\varphi_n(t) = (Lnt)^n t^{b-1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$1-a < 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } 1-a < \alpha < 1$
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\alpha+a-1} (Lnt)^n = 0$
 $\Rightarrow \varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \quad (\alpha < 1)$

Alors Γ est ∞ sur $J_0, \infty[$.

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (Lnt)^n t^{x-1} e^{-t} dt$

$\Rightarrow \Gamma$ est une fonction convexe.

Exercice "Série 1"

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

- 1) Soit $f(x,t) = e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$; $t > 0$
 $\forall t > 0, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, \infty[$.
 $\forall x > 0, t \mapsto f(x,t)$ est C^1 sur $]0, \infty[$.

$$|F(x,t)| \leq \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \varphi(t).$$

$\varphi \in C^0$, positive et intégrable sur $]0, \infty[$.

con. $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 1$.
 $\frac{\varphi(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Alors F est définie et continue.
 2) $x > 0, t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0, \infty[$ et
 $\forall t > 0, x \mapsto f(x,t)$ est C^1 sur $[0, \infty[$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t}.$$

$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est C^1 sur $]0, \infty[$
 et intégrable sur $]0, \infty[$.

con. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 0 \end{array} \right.$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = e^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t}.$$

$t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est C^1 sur $]0, \infty[$.

sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{e^{-at}}{4t}; \quad \forall x \in [a, b].$$

ψ est C^∞ , positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ($\psi \geq 0$).
Alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$F''(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \sin^2 t \, dt \quad \text{c.v.}$$

$$= \int_0^\infty e^{-xt} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt.$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt + \int_0^\infty e^{-xt} \cos(2t) dt \right).$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^\infty e^{-xt} \cos(2t) dx \right).$$

$$3) \int_0^{\infty} e^{xt} \cos(et) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} \bar{e}^{xt} e^{eit} dt \right) \\ = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$4) : \text{Pq } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

$$\text{ona. } |F(x)| \leq \int_0^{\infty} \bar{e}^{xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

$$* \text{ Pq } \lim_{x \rightarrow \infty} F'(x) = 0.$$

$$\text{ona. } F'(x) = - \int_0^{\infty} \bar{e}^{xt} \frac{\sin et}{t} dt$$

$$\text{ona. } \left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq 1 \text{ et } |\sin t| \leq 1$$

$$\Rightarrow |F'(x)| \leq \int_0^{\infty} \bar{e}^{xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Autrement.

$\forall x > 0, t \mapsto \bar{e}^{xt} \frac{\sin et}{t}$ est C.T. sur $\mathbb{J}_0$ et
 $\forall t > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{e}^{xt} \frac{\sin et}{t} = 0$
 $t \mapsto \bar{e}^{xt} \frac{\sin et}{t}$ est C.T. sur $\mathbb{J}_0$ et
 Soit $a > 0$ sur $[a, \infty[$
 $\left| \bar{e}^{xt} \frac{\sin et}{t} \right| \leq \bar{e}^{at} \frac{\sin et}{t} = \psi(t)$
 ψ est C.T. et intégrable sur $\mathbb{J}_0$
 déjà démontrée dans el. (pour $a = 0$)
 $\Rightarrow$ T.C.D. généralisée
 $\lim_{x \rightarrow \infty} F'(x) = 0.$

$$5) F''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+4}, \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2+4) + C_0$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow \infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right) + C_0 = C_0$$

" 0"

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2+4)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} (x \ln x - x) - \frac{1}{4} \int \ln(x^2+4) dx$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{4} x \ln(x^2+4) - \arctan \frac{x}{2} + C_0$$

I p p.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} x \ln \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right) - \arctan \frac{x}{2} + C_0 \right)$$

" 0"

$$\Rightarrow C_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x > 0.$$

$$\text{Hence } F(x) = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{4} x \ln(x^2 + 4) - \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$