

Th. de Continuité: ACE

Si $(x, t) \mapsto f(x, t)$ est

Continue sur $A \times [a, b]$

Alors $F: x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$
est continue sur A .

Ex $F(x) = \int_0^1 \sin(x^2 + y^2) dy$
 $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)$ est poly $\Rightarrow$ continue
 $x \mapsto \sin x$ continue sur $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ est continue
 $\Rightarrow F$ continue

Th de Fubini

Si $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ Continue

$$\text{Alors } \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt$$

Intégrale à paramètre.

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

avec $f: A \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Th de dérivabilité: AC R

Si $(x, t) \mapsto f(x, t)$ est continue sur $A \times [a, b]$
 $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue sur $A \times [a, b]$
Alors F est dérivable sur A .
et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Th. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ existe et continue sur $A \times [a, b]$
Alors F est C^n sur A .
et $F^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$

Exercise 6

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

1) Solve $g(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$

g is continuous on $\mathbb{R} \times [0,1]$

$\forall t \in (0,1) \text{ (fixe)} \quad x \mapsto g(x,t) \text{ is derivable on } \mathbb{R}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$$

$(x,t) \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ is continuous on $\mathbb{R} \times [0,1]$

Abn. for C^1 on $\mathbb{R}$ ok.

$$f'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

$$v_t = -2x \cdot e^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

$$f'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt \quad \left(\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{array} \right)$$

e) Solve $h(x) = f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$

f is derivable on $\mathbb{R}$

$t \mapsto e^{-t^2}$ continuous $\Rightarrow x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ is derivable on $\mathbb{R}$

$\Rightarrow h$ is derivable on $\mathbb{R}$ ok.

$$h'(x) = f'(x) + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$$

$$\Rightarrow h(x) = c_0 = h(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

one

$$|f(x)| \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \quad (1+x^2 \geq 2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{or. } f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

or $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

$$= 2 \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \sqrt{\pi}$$

$$u = t^2$$

$$du = 2t dt$$

Exercice 1 :

$g:]0,1[\rightarrow \mathbb{C}$ C.N. et intégrable sur $]0,1[$.

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{1+t} dt = \int_0^1 g(t) \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt \quad (|t| < 1)$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n t^n g(t) dt.$$

$$= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) dt \text{ avec } S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k t^k g(t).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: S_n est C.N. sur $]0,1[$.

$S_n \xrightarrow{C.S.} S: t \mapsto \frac{g(t)}{1+t}$ sur $]0,1[$.

S est C.N. sur $]0,1[$.

$$|S_n(t)| = \left| \frac{g(t)(1 - (-1)^{n+1} t^{n+1})}{1+t} \right|$$

$$\Rightarrow |S_n(t)| \leq 2 \cdot |g(t)|$$

or $t \mapsto 2|g(t)|$ est C.N., $\oplus$ et intégrable sur $]0,1[$.

$$\stackrel{\text{Th. D}}{\Rightarrow} \int_0^1 \frac{g(t)}{1+t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(t) dt.$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k g(t) dt.$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 t^k g(t) dt.$$

a) $f(x) = \int_0^1 \frac{tx}{1+t} dt.$

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid t \mapsto \frac{tx}{1+t} \text{ est C.N. sur }]0,1[\}$

$$\text{et } \int_0^1 \frac{tx}{1+t} dt \text{ est C.N. sur }]0,1[$$

CV

$$t \mapsto 1 + \frac{t^x}{1+t} = \frac{1}{e} < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposition $\frac{t^x}{1+t} \underset{0}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ qui est intégrable en 0 ($\alpha(0)$)
Soit $-x \leq 1 \Leftrightarrow x > -1$.

Donc $D_f =]-1, \infty[$.

* Soit $h(x,t) = \frac{t^x}{1+t}$ $x > -1, t \in]0,1[$.

$\forall x > -1$, $t \mapsto h(x,t)$ est C.P. sur $]0,1[$.

$\forall t \in]0,1[, x \mapsto h(x,t)$ continue sur $]-1, \infty[$.

Soit $[a,b] \subset]-1, \infty[$ ($-1 < a < b$)
 on a $x \mapsto t^x = e^{x \ln t}$ est $\downarrow$ ($\ln t < 0$)

$\Rightarrow |h(x,t)| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t), \forall x \in [a,b]$

φ est C.P., positive et intégrable sur $]0,1[$ (d'après ce qui précède)
 Alors f est continue sur $]-1, \infty[$ pour $x \neq a, b$

$$2) f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1+t} dt \\ = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x+1) = f(0)$ (Continuité en 0)

$$\Rightarrow f(x+1) = f(0) + o(1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{-1-x+1} - f(0) + o(1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{-1-x+1} - \ln 2 + o(1)$$

3) Soit $x > -1$.

Développer par $g(t) = t^x$

get C^∞ sur $[0,1]$ et intégrable ($x > -1$)

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \binom{x}{n} t^n t^x dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n! x}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.

$$\text{on } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\text{on } f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{e^{x \ln t}}{1+t} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln t)^k}{k! (1+t)} dt$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln t)^k}{k! (1+t)} dt \cdot x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \Rightarrow f \in DSE(0) \text{ sur }]-1,1[$$

Justification 6

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(t) dt.$$

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln t)^k}{k! (1+t)} dt.$$

$\forall n \in \mathbb{N}; S_n \in C \cap \text{near Joll} \mathbb{C}.$

$S_n \xrightarrow{C} S: t \mapsto \frac{t^x}{1+t} \text{ near Joll} \mathbb{C}.$

$S \in C \cap \text{near Joll} \mathbb{C}.$

$$|S_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln t)^k}{k! (1+t)} \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x \ln t|^k}{k! (1+t)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x \ln t|^k}{k! (1+t)}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; |S_n(t)| \leq \frac{e^{|x \ln t|}}{1+t} = \frac{e^{-|x \ln t|}}{1+t} = \frac{e^{-(x \ln t)}}{1+t} \geq 0$$

$\varphi \in C \cap \text{positive and integrable near Joll} \mathbb{C}$
 T.C.D $\Rightarrow \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(t) dt.$
 $\varphi(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow -1/x > -1$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x}$$

Riqua IITT

$$Rq. \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{|x|^k (Lnt)^k}{k! (1+t)} dt < \infty.$$

$$\int_0^1 \frac{|x|^k (Lnt)^k}{k! (1+t)} dt = \frac{|x|^k}{k!} \int_0^1 \frac{(Lnt)^k}{(1+t)} dt$$

$$= \frac{|x|^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{u^k e^{-u}}{1+e^{-u}} du.$$

$$u = -Lnt \\ du = -\frac{dt}{t}$$

$$\leq \frac{|x|^k}{k!} \int_0^{\infty} u^k e^{-u} du.$$

$$\leq \frac{|x|^k}{k!} \Gamma(k+1) = k!$$

$$c) I_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{(Lnt)^k}{1+t} dt$$

D'après 1) pour $g(t) = (Lnt)^k$
 $g \in \mathcal{C}^1$ intégrable sur $[0,1]$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \\ g(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\Rightarrow I_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{k!} \int_0^1 t^n (Lnt)^k dt.$$

$$J_{n,k} = \int_0^1 t^n (Lnt)^k dt.$$

$$u = (Lnt)^k.$$

$$u' = k(Lnt)^{k-1} \cdot L = \frac{L}{n+1} t^{n+1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0$$

$$\frac{L^{n+1} (Lnt)^k}{n!} = 0 \quad (n \neq 1 > 0)$$

or $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, t \mapsto t^n (Lnt)^k$ est intégrable sur $[0, 1]$. ($\cdot = 0$ ($\frac{1}{\sqrt{t}}$))

$$\text{Alors } \sigma_{n,k} = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 t^n (Lnt)^{k-1} dt \\ = -\frac{k}{n+1} \sigma_{n,k-1}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

or $t \mapsto t^n (Lnt)^k$ continue, garde un signe constant et non nulle.
 $\sigma_{n,k} = \int_0^1 t^n (Lnt)^k dt \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\prod_{p=1}^k \sigma_{n,p}}{\sigma_{n,p-1}} = \frac{k}{\prod_{p=1}^k \frac{-p}{n+1}}$$

$$\frac{\sigma_{n,k}}{\sigma_{n,0}} = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{n,k} = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k} \sigma_{n,0}$$

$$\text{or } \sigma_{n,0} = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 1.

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot e^{-xt} dt.$$

1) $\forall x > 0; t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$ est

C.T. sur $[0, \infty[$.

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} = 1 \cdot 1 = 1$

Si $x > 0$

$$t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt} = \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{e^{xt}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin t}{t} e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $(0, \infty)$

$\Rightarrow t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$

$\Rightarrow f(x) < \infty, \forall x > 0$

$$\text{Si } x = 0 \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \cdot \underline{\underline{CV}}$$

IPP

$$u = \frac{1}{t} \rightarrow u' = -\frac{1}{t^2}$$

$$v' = \sin t \rightarrow v = 1 - \cos t$$

2) a) Par fct C.T. sur $[0, \infty[$

Soit $g(x, t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt}; x > 0, t > 0$

$\forall x > 0, t \mapsto g(x, t) \in C^1$ et continue sur $[0, \infty[$ (d'après 1)

$\forall t > 0, x \mapsto g(x, t) \in C^1$ sur $[0, \infty[$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{\sin t}{t} e^{-xt}$

Soit $[a, b] \subset]0, \infty[$ ($0 < a < b$)

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

Soit $C \cap \mathbb{R}$, $\oplus$ et $\int_{\mathbb{R}} e^{-x} dx$, ∞ ($a > 0$)

$$= 0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

Alors soit $C \cap \mathbb{R}$, ∞ .

$$\text{et } f'(x) = - \int_0^{\infty} x t e^{-xt} dt.$$

$$= - \frac{1}{1+x^2}$$

b) $f(x) = - \arctan x + c, \forall x > 0.$

$$|f(x)| \leq \int_0^{\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \forall x > 0$$

3) $\forall t > 0; G(t) = \int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du.$
 $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ est continue, $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du < \infty$

$\rightarrow G$ est C^1 sur $]0, \infty[$.

$$G'(t) = -\frac{\sin t}{t}$$

$$* \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$$

a) Soit $x > 0;$

$$f(x) - f(0) = \int_0^\infty \frac{x t}{t} (\bar{e}^{xt} - 1) dt \quad (CV)$$

IPP $u = \bar{e}^{xt} - 1 \rightarrow u' = -x \bar{e}^{xt}.$

$\theta' = \frac{\sin t}{t} \rightarrow \theta = -G(t).$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(t) v(t) = \lim_{x \rightarrow 0} G(t) \cdot (\bar{e}^{xt} - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(t) v(t) = \lim_{x \rightarrow 0} G(t) (\bar{e}^{xt} - 1) = 0$$

Alors $f(x) - f(0) = - \int_0^\infty x \bar{e}^{xt} G(t) dt.$
 $u = xt$
 $= - \int_0^\infty \bar{e}^u G\left(\frac{u}{x}\right) du.$

b) $\forall \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^\infty \bar{e}^u G\left(\frac{u}{x}\right) du = 0$

$\forall x \in]0, \infty[, u \mapsto \bar{e}^u G\left(\frac{u}{x}\right)$ est C.I.T. sur $]0, \infty[.$
 $\forall u \in]0, \infty[, \lim_{x \rightarrow 0} \bar{e}^u G\left(\frac{u}{x}\right) = 0$

$u \mapsto 0$ est C.I.T. sur $]0, \infty[.$

G est continue sur $]0, \infty[.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0 \quad \text{faux}$$

$\Rightarrow G$ est bornée $\Rightarrow \exists \pi > 0$ q. $|G(x)| \leq \pi, \forall x > 0$
sur $]0, +\infty[$.

$$\Rightarrow |\bar{e}^u \cdot G(\frac{u}{x})| \leq \pi \bar{e}^u; \forall x > 0$$

$\Rightarrow u \rightarrow \bar{e}^u$ est C.T., positive et unitaire sur $]0, +\infty[$.

T.C.D. généraliser $\Rightarrow \lim_{ot.} \int_0^{+\infty} \bar{e}^u G(\frac{u}{x}) du = 0$

$$\Rightarrow \lim_{ot.} f(x) = f(0)$$

D'autre part on a $\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2}$ car $\forall x$.

$$\lim_{ot.} f(x) = \frac{\pi}{2} \\ \parallel \\ f(0).$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$