

Def. $R_a = \sup \{ r \geq 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée} \}$

Lemme d'Abel

si $(a_n r^n)$ bornée $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \mid z \mid < r \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est abs cv

Appliquons D'Alembert
à $u_n(z) = a_n z^n$

App si $a_n = F(n)$: fraction rationnelle en n
Alors $R=1$

$\sum_{n \geq 0} \lambda^n z^n$ ($\lambda \neq 0$) est de rayon $R = \frac{1}{|\lambda|}$

si $|a_n| \leq |b_n|$ ou $|a_n| = O(|b_n|)$ ou $|a_n| = o(|b_n|)$ alors $R_a \geq R_b$

$R_b = +\infty \Rightarrow R_a = +\infty$ ou $\exists z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_0| = R_b$ tq $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ div ou $(a_n z_0^n)$ n'est pas bornée $\Rightarrow R_a = R_b$

si $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$

Détermination du rayon de cv de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

soit $a_n = b_n + c_n$
 $\Rightarrow R_a \geq \min(R_b, R_c)$
si $R_b \neq R_c$ alors $R_a = \min(R_b, R_c)$

si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est la série produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$
Alors $R_a \geq \min(R_b, R_c)$

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ a m rayon que $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n} z^{n-1}$ $k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow$ " " " $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n^k} z^n$ $k \in \mathbb{N}$
 $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ a m rayon de cv que $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$
 $\Rightarrow$ " " " " $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^k} z^n$ $k \in \mathbb{N}$

si $|z| < R_a \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ abs cv} \\ \text{la suite } (a_n z^n) \text{ bornée} \end{cases}$
si $|z| > R_a \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ div grossière} \\ (a_n z^n) \text{ n'est pas bornée} \end{cases}$

si il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ cv ou $(a_n z_0^n)$ bornée $\Rightarrow |z_0| \leq R$
 $\rightarrow$ si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ cv mais n'est pas abs cv $\Rightarrow |z_0| = R$
 $\rightarrow$ si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ div ou $(a_n z_0^n)$ n'est pas bornée $\Rightarrow |z_0| \geq R$
 $\rightarrow$ si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ div et $a_n z_0^n \rightarrow 0$ $\Rightarrow |z_0| = R$

comme: $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \subset \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C} \cup$
 surtout compact K incluant
 le disque ouvert de $\mathbb{C} \cup \mathbb{D}_R$

L'app: $S: \mathbb{D}_R \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$
 est continue sur le
 disque ouvert $\mathbb{D}_R$

Régularité de la
 fonction somme d'une
 série entière

L'app: $S: J-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
 est C^∞ sur $J-R, R[$ et
 $\forall k \in \mathbb{N}; S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$
 $\Rightarrow \frac{S^{(k)}(0)}{k!} = a_k$

Déf: $\exists \sum_{n \geq 0} a_n x^n \rightarrow R > 0$ tq.
 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \forall x \in]-R, R[$

f est C^∞ sur $J-R, R[$ et
 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$

a_n est unique
 $f:]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$
 f est DSE(0)
 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
 = Série de Taylor de f

f est C^∞ et
 $\exists R > 0$ tq

$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ sur
 $J-R, R[$

Ex: si f est C^∞ sur $J-R, R[$ et
 $\exists \eta \geq 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in J-R, R[$
 $|f^{(n)}(x)| \leq \eta$

Si f est DSE(0)
 Alors f' " "
 - f " "

Si f et g sont DSE(0)
 Alors $f+g$ est DSE(0)
 - $f \cdot g$ " "

