

Les séries entières

1) Rayon de convergence

Proposition-Définition

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, alors l'ensemble

$$I = \{\rho \geq 0 \text{ tel que la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée,}\}$$

est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est

$$R = \sup I = \sup \{\rho \geq 0 \text{ tel que } (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Proposition

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Alors

i) $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

ment.

ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et par suite la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge.

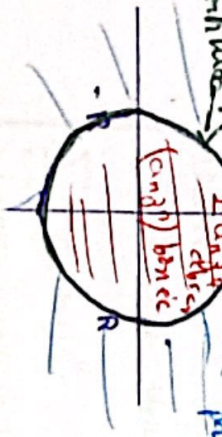
Dans $\mathbb{C}$

$\sum a_n z^n$ div

Dans $\mathbb{R}$

La suite $\sum a_n z^n$ est bornée

cadre



$\sum a_n z^n$ div

Remarque

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge ou bien la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $|z_0| \leq R$.

- S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ diverge ou bien la suite $(a_n z_0^n)$ n'est pas bornée, alors $|z_0| \geq R$.

1 Détermination du rayon de convergence

D'Alembert

On peut appliquer la règle de D'Alembert pour déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$

Proposition

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectives R_a et R_b

- Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$
- Si $|a_n| = O(|b_n|)$, alors $R_a \geq R_b$
- Si $|a_n| = o(|b_n|)$, alors $R_a > R_b$
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectives R_a et R_b .

Somme

On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière

somme $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n)z^n$. Alors

i) $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$

$\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

ii) Si $R_a \neq R_b$, alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Produit

On note R_c le rayon de convergence de série entière produit

$\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Alors

i) $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n =$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Dérivée

* La série entière dérivée est la série définie par $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} =$

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

* La série entière dérivée a même rayon de convergence que la série entière.

Primitive

* La série entière primitive est la série définie par

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}.$$

* La série entière primitive a même rayon de convergence que la série entière.

II) Propriétés de la fonction somme

Proposition

Une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de variables réelles de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement et par suite uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert $] -R, R[$.

Théorème

La fonction somme de la série entière $S : x \rightarrow S(x) =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $] -R, R[$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} =$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}. \forall x \in] -R, R[$$

$$\text{On en déduit: } \forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

Remarque

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$,

alors

$$\forall x \in] -R, R[, \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

III) Fonction développable en série entière

* Définition

Soit $f :]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{C}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
On dit que f est développable en série entière en 0 et on note $DSE(0)$ s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \forall x \in]-\alpha, \alpha[\cap]-R, R[$$

* Théorème

Soit $f :]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{C}$.

Si f est $DSE(0)$ avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \forall x \in]-\alpha, \alpha[\cap]-R, R[$, alors

- i) f de classe C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[\cap]-R, R[$.
- ii) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. (D'où l'unicité de la suite (a_n))

* Opérations sur les fonctions $DSE(0)$

Soient f et g deux fonctions $DSE(0)$ avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \forall x \in]-R_1, R_1[\text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \forall x \in]-R_2, R_2[, \text{ alors}$$

- i) $f + g$ est $DSE(0)$ avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n, \forall x \in]-R_1, R_1[\cap]-R_2, R_2[$

* Théorème

ii) fg est $DSE(0)$ avec $fg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \forall x \in]-R_1, R_1[\cap]-R_2, R_2[$

$$\text{où } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

iii) f' est $DSE(0)$ avec $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \forall x \in]-R, R[$

iv) Soit F une primitive de f , alors F est $DSE(0)$ avec $F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \forall x \in]-R, R[$.

* Théorème

Soit $f :]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ .
S'il existe $M > 0$ et $R > 0$ tels que $|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in]-\alpha, \alpha[\cap]-R, R[$, alors f est développable en série entière en 0 avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \in]-\alpha, \alpha[\cap]-R, R[$$

. Il est appelé aussi développement en série de Taylor de f .

Les développements en série entière usuels

Développement en série entière(DSE)	Intervalle
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\mathbb{R}$
$ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$\mathbb{R}$
$sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$\mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$\mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$	$] -1, 1[$
$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$	$] -1, 1[$
$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$	$] -1, 1[$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$	$] -1, 1[$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$] -1, 1[$