

Problème "Fonction Gamma et série entière"

Problème .

Pour tout le problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (F_\lambda)$$

On rappelle que l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle (F_λ) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.

PARTIE I

1. À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?
2. On pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

- (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.
- (b) Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
- (c) En déduire, pour tout réel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p)(\alpha + p - 1) \cdots (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1).$$
- (d) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n .
- (e) Donner un équivalent de la fonction Γ au voisinage de 0.
3. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrable.
4. Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

5. a) Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus Z^-$, montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus Z^-$.
 - b) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$.
- Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{C} \setminus Z^-$.

La formule précédente permet de prolonger la fonction Γ à $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

PARTIE II

Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$ avec $a_0 \neq 0$. Pour tout $x \in]0, R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+\alpha}.$$

1. Montrer que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) si et seulement si

$$\alpha^2 = \lambda^2, \quad ((\alpha + 1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0, \quad \text{et pour tout } n \geq 2, \quad ((\alpha + n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2}.$$

2. On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$.

(a) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\alpha + 1)}{2^{2p} p! \Gamma(\alpha + p + 1)}$

(b) Les a_n étant ceux trouvés précédemment; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

- (c) Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) = 1$, alors

$$y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}.$$

puis donner un équivalent de la fonction y_λ au voisinage de 0.

3. On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$; soit $p \in \mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha + p)(\alpha + p - 1) \cdots (\alpha + 1)$ par $\frac{\Gamma(\alpha + p + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}$, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

- a) En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(-\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}.$$

est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (F_λ) .

- b) Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est libre dans $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (F_λ) .

PARTIE III

Dans cette partie, on va construire, dans les cas $\lambda = 0$ ou 1 , une solution z_λ de l'équation différentielle (F_λ) , définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui soit linéairement indépendante avec la solution y_λ .

A- Étude de (F_0)

On rappelle que

$$\forall x > 0, \quad y_0(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^p p!)^2} x^{2p}.$$

Soit $\alpha > -1$; on définit la suite $(a_{2p}(\alpha))_{p \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $a_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$a_{2p}(\alpha)(\alpha + 2p)^2 = a_{2p-2}(\alpha), \quad p \geq 1. \quad (1)$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2}.$$

(b) On voit bien que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les fonctions a_{2p} sont dérivables en 0 ; on pose alors

$$b_p = a'_{2p}(0) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$b_p = -\frac{1}{(2^p p!)^2} H_p.$$

(Ind : Ecrire $a_{2p}(\alpha) = e^{\ln(a_{2p}(\alpha))}$).

(c) Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 1} b_p z^{2p}$.

2. (a) En utilisant la relation (1), montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$(2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) = b_{p-1},$$

avec la convention $b_0 = 0$.

(b) En déduire que la fonction

$$z_0 : x \mapsto \ln x \, y_0(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} b_p x^{2p}$$

est une solution de l'équation différentielle (F_0) , définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Vérifier que la famille (y_0, z_0) , d'éléments de $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_0) .

B- Étude de (F_1) .

On rappelle que

$$\forall x > 0, \quad y_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}.$$

Soit $\alpha \in]0, 2[$; on définit la suite $(c_{2p}(\alpha))_{p \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $c_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$c_{2p}(\alpha) ((\alpha + 2p)^2 - 1) = c_{2p-2}(\alpha), \quad p \geq 1. \quad (2)$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}.$$

(b) On voit là aussi que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les fonctions c_{2p} sont dérivables en 1 ; on pose alors

$$d_p = c'_{2p}(1) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$d_p = -\frac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)!}(H_p + H_{p+1} - 1).$$

2. (c) Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 1} d_p z^{2p}$.
3. (a) En utilisant la relation (2), montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$((1+2p)^2 - 1)d_p + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1},$$

avec la convention $d_0 = 0$.

4. (b) En déduire que la fonction

$$u_1 : x \mapsto 2y_1(x) \ln x + \sum_{p=1}^{+\infty} d_p x^{2p+1}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)y = \frac{2}{x},$$

définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

5. Montrer que l'équation différentielle (E_1) possède une solution v_1 , définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est de la forme

$$v_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n x^{n-1}.$$

6. Vérifier que la fonction $z_1 = v_1 - u_1$ est une solution de l'équation différentielle (F_1) , définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Vérifier que la famille (y_1, z_1) , d'éléments de $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_1) .