

Problèmes "série entière"

Exercice "MP2017"

On note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial définie par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \geq k$ et on considère la suite réelle $(B_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$B_0 = 1 \quad \text{et} \quad B_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} B_k.$$

1. Déterminer B_1 et B_2 .
2. Montrer que, pour tout entier non nul n , $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$.
3. Montrer que, pour tout entier n , $|B_n| \leq n!$. (On rappelle que $e \approx 2.7 \dots$).
4. Que peut on dire du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.
5. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < R$, $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$.
6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\cotan(\pi x) = i + \frac{2i}{e^{2i\pi x} - 1}$.
7. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $|x| < \frac{R}{2\pi}$, $\pi x \cotan(\pi x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2i\pi x)^n$.
8. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que la famille $\left(\frac{x^{2n}}{k^{2n}} \right)_{n \geq 1, k \geq 1}$ est sommable.
9. En admettant la relation : $\pi x \cotan(\pi x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - k^2}$, $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, montrer que

$$\pi x \cotan(\pi x) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \psi(2n) x^{2n}.$$

10. En déduire que, pour tout entier non nul p ,

$$\psi(2p) = (-1)^{p+1} \frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!} B_{2p} \quad \text{et} \quad B_{2p+1} = 0.$$

11. Déterminer, alors, le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.

Problème "MP2016"

Pour tout $r \in [0, +\infty[$, on pose $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$.

Partie I

1. Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $\forall z \in D_{|z_1|}, \quad \frac{1}{z - z_1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1)^n}{z^{n+1}}$.

(b) En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes telle que

$$\forall z \in D_{|z_1|}, \quad \frac{1}{(z - z_1)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+k+1}}.$$

2. Soient f une fonction rationnelle et $R = \max\{|z| : z \in \mathbb{C} \text{ est un pôle de } f\}$.

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes tels que

$$\forall z \in D_R, f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

3. Soient $R \in [0, +\infty[$ et $f : D_R \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes tels que

$$\forall z \in D_R, f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

(a) Montrer que f est continue sur D_R .

(b) Soit $r > R$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{i(k+1)\theta} d\theta.$$

4. Soient $R_1 \geq R_2 \geq 0$ et $f : D_{R_2} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On suppose qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et deux suites complexes $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ tels que

$$\forall z \in D_{R_1}, f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad \text{et} \quad \forall z \in D_{R_2}, f(z) = Q(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$ et que $P = Q$.

Dans la suite de ce problème p désigne un entier non nul et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^p$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $Sp(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M , $r(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\}$ et

$$|||M||| = \sup_{\|X\|=1} \|MX\|.$$

1. Montrer que $M \mapsto |||M|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
2. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $X \in \mathbb{C}^p$, $\|MX\| \leq |||M||| \|X\|$.
3. Montrer que, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$,

$$|||MN||| \leq |||M||| \cdot |||N|||.$$

4. Soient $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\lambda \in Sp(M)$. Montrer que $|\lambda| \leq |||M|||$.
En déduire que $r(M) \leq |||M|||$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Sp(A^n) = \{\lambda^n, \lambda \in Sp(A)\}$.
- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r(A^n) = (r(A))^n$.
- (c) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r(A) \leq |||A^n|||^{\frac{1}{n}}.$$

Partie III

Dans cette partie, on fixe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et on note I la matrice identité d'ordre p .

1. Montrer que, pour tout $z \in D_{r(A)}$, la matrice $zI - A$ est inversible. On note alors

$$(zI - A)^{-1} = (f_{ij}(z))_{1 \leq i, j \leq p}.$$

2. (a) Soit $z \in D_{r(A)}$. Montrer que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}$, la fonction f_{ij} est une fraction rationnelle en z .
- (b) En déduire que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}$, il existe un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(\alpha_{ij}(n))_n$ de nombres complexes tels que

$$\forall z \in D_{r(A)}, f_{ij}(z) = P_{ij}(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{ij}(n)}{z^{n+1}}.$$

3. Montrer que, pour tout $z \in D_{\|A\|}$, la série matricielle $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{z^{n+1}}$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = (zI - A)^{-1}.$$

4. En déduire que, pour tout $z \in D_{\|A\|}$,

$$f_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A^n)_{ij}}{z^{n+1}} \text{ où } A^n = ((A^n)_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}.$$

5. Montrer que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $P_{ij} = 0$ et $\alpha_{ij}(n) = (A^n)_{ij}$.

6. En déduire que, pour tout $z \in D_{r(A)}$, la série matricielle $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{z^{n+1}}$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = (zI - A)^{-1}.$$

7. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer que la suite $\left(\frac{\|A^n\|}{(r(A) + \varepsilon)^n} \right)_n$ converge vers 0.

(b) En déduire qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (r(A) + \varepsilon)$.

8. Montrer que

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$