

Devoir à la maison "série entière"

Exercice QCM

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une preuve ou un contre exemple.

1. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
4. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.

Problème

Notations

- Pour $z \in \mathbb{C}$, on désigne par $\bar{z}$, $Re(z)$ et $Im(z)$ le conjugué, la partie réelle et la partie imaginaire de z . Si $R \in]0, +\infty[$ on note $\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.
- Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite DSE_R (resp DSE_∞) s'il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathcal{D}(0, R)$ (resp pour tout $z \in \mathbb{C}$).

Par exemple, la fonction $z \mapsto \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est DSE_∞ .

Partie I "Caractérisation de la fonction exponentielle"

1. Soit $R \in]0, +\infty[$ et $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction DSE_R .
 - (a) Soit $r \in]0, R[$ et $f_n : t \mapsto a_n r^n e^{int}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

- (b) Soit $n, p \in \mathbb{N}$ deux entiers non nécessairement distincts. Que vaut l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt$?
(c) En déduire que pour tout réel $r \in]0, R[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a la formule :

$$a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt.$$

2. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction DSE_{∞} . On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$ et on note $K = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $|a_n| \leq \frac{K}{r^n}$ pour tout réel $r > 0$.
(b) En déduire que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que f est une fonction constante.
3. Soit g une fonction DSE_{∞} telle que $g(0) = 1$. On suppose qu'il existe un réel M vérifiant $|g(z)| \leq M e^{\operatorname{Re}(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- (a) Justifier que la fonction $f : z \mapsto e^{-z} g(z)$ est DSE_{∞} .
(b) En déduire que $g(z) = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Partie II

Soit $\mathbb{H}$ l'espace des fonctions $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et vérifiant la propriété suivante :

Pour tout réel strictement positif α la fonction $t \mapsto h(t)e^{\alpha t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

On munit $\mathbb{H}$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|h\|_1 = \int_0^{+\infty} |h(t)| dt$ pour tout $h \in \mathbb{H}$.

1. Soit $f \in \mathbb{H}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-izt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi la fonction $\hat{f} : z \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-izt} dt$ est bien définie sur $\mathbb{C}$.
2. On veut montrer que $\hat{f}$ est DSE_{∞} . On fixe $z \in \mathbb{C}$.
- (a) Montrer qu'il existe un réel C vérifiant :

$$2^n |f(t)| \frac{t^n |z|^n}{n!} \leq C e^{-t},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

(On pourra observer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{(2|z|+1)t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$).

- (b) En déduire que $\int_0^{+\infty} |f(t)| \frac{t^n |z|^n}{n!} dt \leq \frac{C}{2^n}$

- (c) Montrer alors que $\hat{f}$ est DSE_{∞} et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n m_n(f)}{n!} z^n, \text{ où } m_n(f) = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt.$$

3. On suppose maintenant que $f \in \mathbb{H}$ et que $m_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On se propose de démontrer que f est nulle. On fixe un réel $a > 0$ et on pose :

$$F(z) = \int_0^a f(t)e^{-iz(t-a)}dt \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Il est clair que F est DSE_∞ (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

- (a) Vérifier que si $\text{Im}(z) \geq 0$ alors on a l'inégalité suivante :

$$|F(z)| \leq \|f\|_1. \quad (0.0.1)$$

- (b) Justifier que $\hat{f}$ est nulle sur $\mathbb{C}$, puis établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = - \int_a^{+\infty} f(t)e^{-iz(t-a)}dt.$$

- (c) Dédire que l'inégalité (1) reste vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$.
 (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(in) = 0$, puis déduire que F est nulle sur $\mathbb{C}$.
 (e) Montrer alors que $\int_0^a f(t)dt = 0$ puis conclure que f est nulle.

Partie III

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$

- (a) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_k vérifiant $G^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x > 0$.
 (b) En déduire que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $G^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 (c) La fonction G est elle DSE_R pour un certain $R > 0$?

1. Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = G(x-1)G(2-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, que φ est strictement positive sur $]1, 2[$, et qu'elle est nulle en dehors de cet intervalle.

On pose $\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \varphi(t)e^{itx}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\psi(x) = \frac{i^n}{2\pi x^n} \int_1^2 \varphi^{(n)}(t)e^{itx}dt, \quad x \neq 0.$$

En déduire que la fonction $x \mapsto x^n \psi(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer alors que la fonction $x \mapsto x^k \psi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On admet que $\hat{\psi}(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k(\psi) = 0$, où $m_k(\psi) = \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t)dt$.