

Epreuve de Mathématiques 2 MP

Partie I

1) $R = \sup \{r \in [0, +\infty[/ (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$.

2) Soit $\rho \in]0, R[$. Puisque $\rho < R$ et que R est le plus petit des majorants de $\{r \in [0, +\infty[/ (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$, ρ n'est pas un majorant de $\{r \in [0, +\infty[/ (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$. Donc, il existe $r \in]\rho, R[$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Soit M un majorant de la suite $(|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n \rho^n| = |a_n| \rho^n \leq |a_n| r^n \leq M.$$

On a montré que la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Autre solution. Soit $\rho \in]0, R[$. On sait que la série numérique de terme général $a_n \rho^n$ converge. En particulier, $a_n \rho^n$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et en particulier, la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3) Soit $M \geq 0$ un majorant de la suite $(|a_n \rho^n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors, $M+1 \geq 1$ puis pour tout entier naturel n , $(M+1)^n \geq M+1 \geq M$.

Pour tout entier naturel n , $|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \leq \frac{(M+1)^n}{\rho^n} = \left(\frac{M+1}{\rho}\right)^n$. Le réel $K = M+1 > 0$ convient.

4) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n$.

- $b_0 = 1 \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^0$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \geq 0$. Supposons que $\forall j \in [0, n]$, $|b_j| \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^j$.

$$\begin{aligned} |b_{n+1}| &\leq \sum_{j=1}^n |a_j| \times |b_{n-j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{K}{\rho}\right)^j \times \left(\frac{2K}{\rho}\right)^{n-j} \quad (\text{par hypothèse de récurrence et par définition de } K) \\ &= \left(\frac{K}{\rho}\right)^n \sum_{j=1}^n 2^{n-j} = \left(\frac{K}{\rho}\right)^n \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &\leq \left(\frac{K}{\rho}\right)^n 2^n = \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

5) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq \frac{\rho}{2K}$. Alors, pour tout entier naturel n ,

$$|b_n z^n| = |b_n| \times |z|^n \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n \times \left(\frac{\rho}{2K}\right)^n = 1.$$

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq \frac{\rho}{2K}$, la suite $(b_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On en déduit que $R_b \geq \frac{\rho}{2K} > 0$.

6) Soit R' le minimum des rayons de convergence de S et de T . Puisque les rayons de S et de T sont strictement positifs, R' est strictement positif. On peut alors effectuer le produit de CAUCHY des deux séries entières S et dans le disque de centre 0 et de rayon R' .

Pour tout z tel que $|z| < R'$,

$$\begin{aligned}
 S(z)T(z) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) z^n \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n + \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j} \right) z^n = 1.
 \end{aligned}$$

7) Il existe un nombre réel R' tel que $0 < R' \leq R$ et $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R' ,

$$\forall z \in D(0, R'), S(z)T(z) = 1.$$

Partie II A

1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$. Donc, la restriction de f à $\mathbb{R}$ est continue en 0.

2) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puis $z = x + iy$.

$$e^z - 1 = e^{x+iy} - 1 = e^x (\cos y + i \sin y) - 1 = (e^x \cos y - 1) + i(e^x \sin y).$$

3) $f(0) \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
 f(z) = 0 &\Leftrightarrow e^z - 1 = 0 \text{ et } z \neq 0 \Leftrightarrow e^z = 1 \text{ et } z \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = 2ik\pi \text{ et } z \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^* / z = 2ik\pi.
 \end{aligned}$$

4) D'après la question précédente, $\text{Min}\{|z| / f(z) = 0 \text{ et } z \neq 0\} = 2\pi$. En tenant compte de $f(0) \neq 0$, pour tout $z \in D(0, 2\pi)$, $f(z) \neq 0$ et donc $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ existe.

5) a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z} \left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) - 1 \right) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout nombre complexe non nul z , $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$. Puisque $f(0) = 1$, cette égalité est encore vraie quand $z = 0$ et donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = U(z).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$. Alors, $R_a = +\infty$ puisque la série entière correspondante converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

6) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = - \left(\sum_{j=1}^n \frac{b_{n-j}}{(j+1)!} \right)$. D'après la partie I, $R_b > 0$. De plus, si

pour tout $z \in D(0, R_b)$, on pose $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, alors pour tout $z \in D(0, R_b)$, $U(z)V(z) = 1$.

Si de plus $|z| < \min(2\pi, R_b) = R$, $U(z)V(z) = 1 = f(z)V(z)$ puis $V(z) = \frac{1}{f(z)} = g(z)$.

7) a) Soit $t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus \{0\}$.

$$G(t) = t + \frac{2t}{e^t - 1} = 2t \frac{e^t + 1}{e^t - 1} = 2t \frac{e^{t/2} + e^{-t/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}} = \frac{2t}{\operatorname{th}\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Puisque les fonctions $t \mapsto 2t$ et $t \mapsto \operatorname{th}\left(\frac{t}{2}\right)$ sont impaires, la fonction G est paire.

b) Pour tout $t \in]-R, R[\subset]-2\pi, 2\pi[$, $t + 2g(t) = 1 + (1 + 2b_1)t + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n t^n$. Puisque G est paire, on en déduit que $1 + 2b_1 = 0$ et $\forall k \geq 1$, $b_{2k+1} = 0$.

$$b_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } \forall k \geq 1, b_{2k+1} = 0.$$

Partie II B

1) D'après la question II.A.6), $\gamma_0 = 1$ et $\forall n > 0$, $\gamma_n = - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{n-j}}{(j+1)!}$. Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, γ_n est un nombre réel.

2) $\gamma_0 = 1$. D'après la question II.A.7.b), $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$ et $\gamma_3 = 0$. Enfin, $\gamma_2 = -\frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_0}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

3) Soit $n > 0$. $\gamma_n = - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{n-j}}{(j+1)!}$ et donc $\sum_{j=0}^n \frac{\gamma_{n-j}}{(j+1)!} = 0$. En posant $k = n - j$, on obtient $\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!} = 0$.

4) $\gamma_0 = 1$ et $\forall n > 0$, $\gamma_n = - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{n-j}}{(j+1)!}$. Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, γ_n est un nombre rationnel.

5) D'après la question II.A.7.b), si n est un entier impair supérieur ou égal à 3, $\gamma_n = 0$.

Partie III

1) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$|e^t - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < e^t - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < e^t < 2 \Leftrightarrow t < \ln 2.$$

Donc, si $t \in]-\ln 2, \ln 2[$, $|e^t - 1| < 1$.

2) Pour $t \in I$, $h(t) = 1 - e^t \in]-1, 1[$. Donc, la série de terme général $a_n(h(t))^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

3) a) Soit K un segment non réduit à un point et contenu dans $I =]-\ln 2, \ln 2[$. La fonction exponentielle est continue sur le segment K et en particulier est bornée sur ce segment. Donc, $\exists C_K > 0 / \forall t \in K, |e^t| \leq C_K$.

b) Posons $K = [c, d]$ avec $-\ln 2 < c < d < \ln 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, posons $f_n(t) = a_n(h(t))^n$.

En résumé, chaque f_n est de classe C^1 sur I et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I$, $f'_n(t) = -e^t n a_n(h(t))^{n-1}$ et $f'_0 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t de I ,

$$|f'_n(t)| = e^t n |a_n| |e^t - 1|^{n-1} \leq C_K n |a_n| M^{n-1} \text{ où } M = \max\{|e^c - 1|, |e^d - 1|\}.$$

Puisque $R_a \geq 1$, on sait que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, la série numérique de terme général $n a_n z^{n-1}$ est absolument convergente. Puisque $|M| < 1$, $C_K n |a_n| M^{n-1}$ est le terme général d'une série numérique convergente. Ceci montre que la série de fonctions de terme général f'_n converge normalement et donc uniformément sur K .

- La série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction S_h sur I .
- Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, est de classe C^1 sur I .
- La série des dérivées est uniformément sur tout segment K contenu dans I .

D'après le théorème de dérivation terme à terme, S_h est de classe C^1 sur I et pour tout réel $t \in I$,

$$S'_h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -e^t n a_n (h(t))^{n-1} = -e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} h^n(t).$$

Remarque. On sait que S est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ainsi, h est de classe C^∞ sur I à valeurs dans $] -1, 1[$ et S est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. Donc, $S_h = S \circ h$ est de classe C^∞ sur I . De plus, pour tout réel $t \in I$,

$$S'_h(t) = h'(t)S'(h(t)) = -e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} h^n(t).$$

c) Pour tout $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(t) = -e^t (n+1) a_{n+1}$. t étant fixé, on sait que la série entière associée à $u_n(t)$ est de rayon au moins 1. Donc pour chaque $t \in I$, il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) z^n$ (et non pas il existe une série entière

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ telle que pour chaque $t \in I$...)

4) Le résultat énoncé est complètement faux si $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée k -ème de u_n . On ne corrige pas cette question.

Partie IV

1) Posons $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{1}{n+1}$. On sait que $R_a = 1$ et que pour tout $x \in] -1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\ln(1-x)$. Soit $t \in I \setminus \{0\}$. Alors $|e^t - 1| < 1$ et $e^t - 1 \neq 0$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+1} = \frac{1}{1-e^t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^{k+1}}{k+1} = \frac{-\ln(1-(1-e^t))}{1-e^t} = \frac{t}{e^t-1} = g(t).$$

D'autre part, quand $t = 0$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+1}$ vaut 1 c'est-à-dire $g(0)$. On a montré que

$$\forall t \in I, g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+1}.$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, la fonction $f \times g$ est n fois dérivable sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

b) Soient n et k des entiers naturels tels que $k > n$. Quand t tend vers 0, $h(t) = -t + o(t)$ et donc pour $k > n$, $h^k(t) = 0 \times t^n + (-t)^k + o(t^k)$. Puisque h^k est n fois dérivable en 0 et que le coefficient de t^n dans son développement limité à l'ordre k en 0 est nul, on en déduit que $(h^k)^{(n)}(0) = 0$.

c) Soient n et k des entiers naturels tels que $k > n$. Soit H une fonction de classe C^∞ sur I . D'après la formule de LEIBNIZ,

$$(Hh^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (h^k)^{(j)}(0) H^{(n-j)}(0).$$

Pour tout $j \in [0, n]$, $k > n \geq j$ et donc $(h^k)^{(j)}(0) = 0$. On en déduit que $(Hh^k)^{(n)}(0) = 0$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel t de I , posons $H(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^{k-(n+1)}}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+n+2}$ de sorte que pour tout réel t de I , $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(h(t))^k}{k+1} + (h(t))^{n+1} H(t)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k+n+2}$ est 1 de sorte que la fonction $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+n+2}$ est définie et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. Mais alors, la fonction $H = S \circ h$ est de classe C^∞ sur I .

On en déduit que $g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1} + (h^{n+1}H)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1}$.

3)a) Soient n un entier naturel et k un entier naturel non nul. D'après la formule du binôme de NEWTON, pour tout t ,

$$(h(t))^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j e^{jt}.$$

Pour $n \geq 1$,

$$(h^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j j^n e^0 = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^j j^n.$$

b) $\gamma_0 = 1$. Soit $n \geq 1$. Alors $(h^0)^{(n)} = 0$ puis

$$\gamma_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \left(\sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n \right).$$