

Série entière

Exercice 1

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière dans chacun des cas suivants :

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{(2n)!}} z^n$; b) $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos n}{n(n-1)} z^n$; c) $\sum_{n \geq 1} \operatorname{Log}(1 + \sin \frac{1}{n}) z^n$; d) $\sum_{n \geq 0} \operatorname{ch} n z^{4n}$

2) Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme S des séries suivantes :

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{n!} x^n$; b) $\sum_{n \geq 0} \operatorname{ch} n x^n$; c) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$

Exercice 2

1) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$.

2) Montrer que si la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 3

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$ converge et que sa valeur est $\frac{n!}{2}$.

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \sin(tx) e^{-t^2} dt$.

2) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est DSE(0) sur $\mathbb{R}$, en donnant son développement.

4) Dédurre que f est C^∞ et donner $f^{(n)}(0) \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 4

Soit f l'application définie sur $] -1, 1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Former une équation différentielle du second ordre vérifiée par f .

- 2) Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
- 3) En déduire que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$, et donner son développement.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(*) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x).$$

- 1) Déterminer une solution de l'équation (*), développable en série entière sur $] -1, 1[$.
- 2a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} x^n$$

- b) Calculer la fonction somme de cette série entière.

Exercice 6

On pose $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ et $H_k(x) = (-1)^k \frac{\Phi^{(k)}(x)}{\Phi(x)}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi_t(x) = \Phi(t-x)$ et $G_t(x) = e^{2tx-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Donner sans démonstration les développements en série entière en 0 des fonctions $x \mapsto e^{2tx}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$, ainsi que la valeur de leurs rayons de convergence.
- 2) Montrer que ψ_t est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\psi_t^{(n)}(0) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t).$$

- 3a) Montrer que ψ_t est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini.

- b) Justifier que ψ_t égale à sa série de Taylor en 0.

- c) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(t)x^k}{k!} \quad (1).$$

- 4) a) Montrer que l'on peut dériver terme à terme par rapport à x la relation (1).
b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2(t-x)G_t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)x^k}{k!} \quad (2).$$

5) Soit $t \in \mathbb{R}$,

a) Calculer $H_0(t)$ et $H_1(t)$.

b) Montrer en utilisant les relations (1) et (2) que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, H_{k+1}(t) = 2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)$$

Exercice 5 (d'après MP 2006)

On pose

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que Φ est de classe C^1 et impaire sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que Φ est développable en série entière au $v(0)$. Déterminer ce développement et préciser le rayon de convergence.

3) Soit $\psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \Phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que ψ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Exercice 7 (D'après MP2013).

Soit $\alpha \geq 0$, on considère les équations différentielles suivantes :

$$E_\alpha : x^2 y'' + xy' - (x^2 + \alpha^2)y = 0.$$

$$E'_\alpha : xy'' + (2\alpha + 1)y' - xy = 0.$$

Soit $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On pose

$$\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}, \quad x > 0.$$

1) Montrer que φ est une solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si ψ est une solution de (E'_α) sur $]0, +\infty[$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. On pose $S :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2) Montrer que S est une solution de (E'_α) sur $] -R, R[$ si et seulement si $a_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+2+2\alpha)}.$$

3) a) Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n! \Gamma(\alpha + n + 1)}$ a un rayon de convergence égale à $+\infty$.

b) Montrer que $I_\alpha :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n! \Gamma(\alpha + n + 1)}$ est une solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$

Exercice 8 (D'après MP2019).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx} dt$.

1. Montrer que G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives sous forme intégrale.
2. Montrer que g satisfait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.
3. Résoudre l'équation différentielle obtenue et en déduire que $G(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Développer G en série entière sur $\mathbb{R}$ puis déduire que $G^{(2m)}(0) = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 4^m}$.

5. Soit $m \in \mathbb{N}$,

a) Montrer que la fonction $t \mapsto t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n > m$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixe. En étudiant les variations de $g_n: x \mapsto -x \ln(1 + \frac{t^2}{x})$ sur $[1, +\infty[$, montrer que la suite $((1 + \frac{t^2}{n})^{-n})_{n \geq 1}$ est décroissante.

c) Montrer que pour tout $n > m$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = \frac{\sqrt{\pi} (2m)!}{m! 4^m}$.

On énoncera avec précision le théorème du cours utilisé.

6. Montrer que pour tout $n > m \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = n^{m+\frac{1}{2}} J_{n,m}$ avec

$$J_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^n} du$$

7. Montrer que pour tout $n > m \geq 0$, $J_{n+1,m} = (1 - \frac{2m+1}{2n}) J_{n,m}$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{m+1,m} = (\frac{2m-1}{2m}) J_{m,m-1}$.
9. En déduire une expression simplifiée de $J_{m+1,m}$, $m \in \mathbb{N}$ à l'aide des factorielles.
10. Montrer que pour tout $n > m+1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = n^{m+\frac{1}{2}} \frac{\pi (2m)!}{4^m (m!)^2} \prod_{k=m+1}^{n-1} (1 - \frac{2m+1}{2k}).$$