

Série 2 "Série entière"

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2 n^n} z^n \quad 2) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n}{2^n + n!} z^n \quad 3) \sum_{n \geq 0} ((n^3 + n + 2)^{\frac{1}{3}} - (n^2 + 1)^{\frac{1}{2}}) z^n$$

$$4) \sum_{n \geq 0} \sin(\sqrt{n}) z^n \quad 5) \sum_{n \geq 0} \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} z^n \quad 6) \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1 + b^n} z^{2n} \text{ où } (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$

Exercice 2

Calculer le rayon de convergence R et donner la somme de la série entière dans les cas suivants :

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n \quad 2) \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \quad 3) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1} \quad 4) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!(n+2)}$$

Exercice 3

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. On considère le polynôme $P_\lambda = X^2 + 2\lambda X + 1 \in \mathbb{C}[X]$, et on définit la fonction de la variable réelle F_λ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda + \cos x}$$

On note z_1 et z_2 les racines complexes du polynôme P_λ et on suppose que $|z_1| \leq |z_2|$.

1. a) Préciser les valeurs de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.
- b) On suppose que $|z_1| = 1$ et on choisit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = e^{i\theta}$. Justifier que $z_2 = e^{-i\theta}$ puis trouver une contradiction.
- c) Montrer que $0 < |z_1| < 1$ et $|z_2| > 1$.

2. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{P_\lambda(X)}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

3. a) Vérifier que pour tout réel x , $F_\lambda(x) = \frac{2e^{ix}}{P_\lambda(e^{ix})}$.

b) Montrer que pour tout réel x ,

$$F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{1 - e^{-ix} z_1} + \frac{z_1 e^{ix}}{1 - e^{ix} z_1} \right).$$

4. Justifier que, pour tout réel x , la série numérique $\sum_{n \geq 1} z_1^n \cos(nx)$ est

$$\text{convergente et que } F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n \cos(nx) \right).$$

5. En déduire les valeurs des intégrales $\int_0^\pi \frac{\cos(t)}{1 + \cos(t)} dt$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

6. Donner en particulier les valeurs des intégrales $\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{\cos t + \cos a} dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $a > 0$.

Exercice 4

Soit $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R non nul et possiblement infini tel que $a_0 = 1$. On se propose de démontrer

qu'il existe un nombre réel R' , tel que $0 < R' \leq R$ et $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R' telle que :

$$\forall z \in D(0, R'), \quad S(z)T(z) = 1.$$

Soit p un nombre réel tel que $0 < \rho < R$.

1. Rappeler la définition du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

2. En déduire qu'il existe un nombre réel $K > 0$ tel que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$|a_n| \leq \left(\frac{K}{\rho}\right)^n.$$

3. On considère la suite $(b_n)_n$ définie par récurrence par :

$$b_0 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 0, \quad b_n = -\sum_{j=1}^n a_j b_{n-j}.$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n : $|b_n| \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n$.

5. En déduire que la série $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ a un rayon de convergence > 0 .

6. Soit R' le minimum des rayons de convergence des séries S et T . Expliciter les coefficients de la série produit $S(z)T(z)$, pour z dans $D(0, R')$.

7. Conclure.

Exercice 5

Soient a un réel strictement positif et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{cha - \cos x}$$

I)

1. Montrer que $\varphi(x) = \frac{-2e^{ix}}{(e^{ix} - e^a)(e^{ix} - e^{-a})}$.

2. a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{-2X}{(X - e^a)(X - e^{-a})}$.

b) Dédurre qu'il existe une suite réelle $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ que l'on déterminera, vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cos(nx)$.

3. En déduire l'expression des intégrales $I_n = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

II) On suppose que φ admet un développement en série entière en 0.

1. Établir que ce développement s'écrit : $\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^{2p}$.

2. Calculer b_0 et b_1 .

3. En remarquant la relation $\varphi(x)(cha - \cos x) = 1$, exprimer b_n (avec $n \geq 1$) en fonction de $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$.

4. Démontrer que pour tout entier naturel n , $|b_n| \leq \frac{a^{-2n}}{cha - 1}$.

5. En déduire un minorant du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{p=0}^{\infty} b_p x^{2p}$.

6. On pose $\cos z = e^{iz} + e^{-iz}$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\cos z = cha$.

(b) Soit la série entière $\sum_{p=0}^{\infty} b_p x^{2p}$ de rayon de convergence R . On note

$$S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p z^{2p}.$$

- i. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a $S(z)(\sin z - \cos z) = 1$.
- ii. En déduire la valeur du rayon de convergence R .

Exercice 6 Pour $p \in \mathbb{R}^*$ on note (E_p) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E_p) : x(y'' - y') + py = 0.$$

Soient $p \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence infini.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E_p) si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (0.1)$$

2. Montrer que (E_p) possède des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement si $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'alors, les solutions polynomiales non nulles de (E_p) sont de degré p .

On ne demande pas de déterminer explicitement les solutions polynomiales lorsqu'elles existent.

3. Dans cette question, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ soit solution de l'équation (E_p) . L'objectif est de déterminer une expression simple de P en fonction du paramètre p .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $h(x) = e^{-x}P(x)$.

a) Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle $x(y'' + y') + py = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Justifier que la fonction h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

On note $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de h . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n. \quad (0.2)$$

Montrer que ces coefficients vérifient :

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ n(n+1)b_{n+1} = -(n+p)b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (0.3)$$

c) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+p-1)!}{p!n!(n-1)!} b_1.$$

d) On pose $g_p(x) = x^{p-1}e^{-x}$. Justifier que $g_p^{(p)}$ est développable en série entière et déduire de la question précédente que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = Cx^p e^x g_p^{(p)}(x)$$

où C est une constante réelle dont on précisera l'expression en fonction de b_1 et de p .

4. Dans cette question on fixe un réel p non nul et on suppose que $p \notin \mathbb{N}^*$.

a) Justifier l'existence de suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non identiquement nulles telles que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence

infini et telles que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E_p) .

On fixe une telle série entière et on pose pour $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b) Montrer qu'il existe un entier naturel $q > p$ tel que, pour tout entier $n \geq q$,

$$|a_{n+1}| \geq \frac{|a_n|}{2(n+1)}.$$

c) En déduire que, pour tout entier $n \geq q$,

$$|a_n| \geq \frac{q!|a_q|}{2^{n-q} n!}.$$

d) Pour tout $x \geq 0$, on pose $\psi(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} |a_n| x^n \geq K \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$.

i) Trouver une constante K et une fonction polynômiale $R(x)$ tel que

$$\psi(x) \geq K(e^{\frac{x}{2}} - R(x)),$$

ii) Déduire que la fonction

La fonction $x \mapsto \psi^2(x) \frac{e^{-x}}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.