

Exercices corrigés "Séries entières"

Exercice 1 Déterminer les rayons de convergence des séries entières

- 1) $\sum (\sin n) z^n$ 2) $\sum 3^{-n} (1 + 2/n)^{n^2} z^{4n}$
 3) $\sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + 1} \right) z^n$ 4) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} z^n$
 5) $\sum_{n \geq 1} \frac{ch \ n}{n} z^n$ 6) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} z^n$
 7) $\sum_{n \geq 1} \binom{2n}{n} z^n$ 8) $\sum_{n \geq 1} n^{\sqrt{n}} z^n$
 9) $\sum_{n \geq 1} \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right) z^n$ 10) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{n}} \right)^n z^n$
 11) $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\frac{1}{2^n} \right) z^n$ 12) $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$

Réponse.

- $\sum (\sin n) z^n$: La suite $(\sin n)$ est bornée, le rayon de convergence est donc ≥ 1 . Mais elle ne converge pas vers 0, le rayon est donc ≤ 1 . D'où $R = 1$.
- $\sum 3^{-n} (1 + 2/n)^{n^2} z^{4n}$: Si $z \neq 0$, $3^{-n} (1 + 2/n)^{n^2} z^{4n} \sim e^2 \left(\frac{x^4}{3} \right)^n$. Cela donne un rayon de convergence égal à $3^{1/4}$.
- $\sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + 1} \right) z^n$: La suite (a_n) converge vers 0, donc $R \geq$

- En réécrivant : $a_n = \ln \left(\frac{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right) = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. On a $a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. $\sum a_n$ ne converge pas absolument, donc $R \leq 1$. **Conclusion** : $R = 1$.
- $R = 1$ (même raisonnement que le 1).
- $R = 1/e$ (même raisonnement que $\sum (ch \ n) z^n$ et équivalent).
- $R = 1$ (équivalent, d'Alembert).
- $R = 1/4$ (d'Alembert).
- $R = 1$ (d'Alembert).
- $R = 1$ (équivalent).
- $R = +\infty$ (d'Alembert).
- $R = 1$ (suite bornée ne tendant pas vers 0).
- $R = 1$ (équivalent).

Exercice 2

Développer Donner les développements en série entière des fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

- $\ln(1 + 2x^2)$
- $\frac{1}{a - x}$ avec $a \neq 0$
- $\ln(a + x)$ avec $a > 0$
- $\frac{e^x}{1 - x}$

5. $\ln(1 + x - 2x^2)$

6. $(4 + x^2)^{-3/2}$

Réponse

1. Il suffit de remplacer t par $2x^2$ dans le développement en série entière de $\ln(1 + t)$. On a donc

$$\ln(1 + 2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^{2n}}{n}.$$

La série converge si $|2x^2| < 1$. Son rayon de convergence est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Il suffit de factoriser par a au dénominateur et d'utiliser le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$. Il vient

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}}.$$

Pour $|x/a| < 1 \iff |x| < |a|$, on obtient

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est $|a|$.

3. On factorise par a :

$$\ln(x+a) = \ln(a(1+x/a)) = \ln(a) + \ln(1+x/a).$$

Pour $|x/a| < 1$, soit $|x| < a$, on en déduit

$$\ln(x+a) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{na^n}.$$

Le rayon de convergence de la série entière obtenue est a .

4. On réalise le produit de Cauchy des deux séries :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

La deuxième série ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

La série converge pour $|x| < 1$ (règle du produit de Cauchy), et comme $a_n \geq 1$, le rayon de convergence de la série obtenue est exactement égal à 1 puisque, pour $|x| > 1$, la série $\sum a_n x^n$ ne peut pas converger puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

5. On a $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$ donc la fonction est définie sur $I =]-1/2, 1[$, et sur cet intervalle, elle s'écrit

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \ln(1-x) + \ln(1+2x).$$

En utilisant le développement en série entière de $\ln(1+u)$, on obtient

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

(valable pour $|x| < 1$)

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^n}{n}$$

(valable pour $|x| < 1/2$). En effectuant la somme, on en déduit que

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n.$$

La série obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

6. On factorise par 4 pour se ramener à $(1+t)^\alpha$. On a donc

$$(4+x^2)^{-3/2} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}.$$

La fonction $u \mapsto (1+u)^{-3/2}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et

$$\forall u \in] -1, 1[, \quad (1+u)^{-3/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} u^n.$$

Il en résulte que pour tout x tel que $\frac{x^2}{4} \in] -1, 1[$, on a

$$\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-3/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

La série entière obtenue a pour rayon de convergence 2.

Exercice 3

1) Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ sur $] -1, 1[$.

2) Dédurre le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \arcsin(t)$ sur $] -1, 1[$.

3) Dédurre la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$

Réponse.

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$.

De plus, $\forall u \in] -1, 1[, (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} u^n$.

En particulier, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -t$:

$$R = 1 \text{ et } \forall t \in] -1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3) \dots (-(2n-1))}{2^n n!} (-t)^n.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n n!$, on obtient :

$$\forall t \in] -1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$$

$$\text{Conclusion : } R = 1 \text{ et } \forall t \in] -1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n.$$

3. D'après la question précédente, en remarquant que $x \in] -1, 1[\iff t = x^2 \in [0, 1[$ et $[0, 1[\subset] -1, 1[$, il vient :

$$\forall x \in] -1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n} \text{ avec un rayon de convergence } R = 1.$$

Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ avec $\text{Arcsin}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé.

De plus, on obtient :

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{Arcsin } x = \underbrace{\text{Arcsin } 0}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \text{ avec}$$

un rayon de convergence $R = 1$.

4. Prenons $x = \frac{1}{2} \in] -1, 1[$ dans le développement précédent.

$$\text{On en déduit que } \text{Arcsin} \left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 4 Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière en variable réelle x .
2. La série converge-t-elle pour les valeurs R et $-R$ de la variable ?
3. Démontrer que la convergence est uniforme sur le segment $[-R, 0]$.
4. Étudier la limite en R (à gauche) de $(R - x)S(x)$ où S désigne la fonction somme de la série entière.

Solution :

1. Le rayon est, d'après le cours, le même que celui de $\sum \frac{1}{n} x^n$, car

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Donc $R = 1$.

2. Pour $x = 1$, la série diverge (comparaison à la série harmonique, critère de Riemann).
Pour $x = -1$, la série converge (série alternée, théorème de Leibniz).
3. La convergence uniforme sur $[-1, 0]$ est donnée par la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées.
4. Si $x \in [0, 1[$, les calculs suivants sont valides (on n'a pas besoin de

passer aux sommes partielles) :

$$\begin{aligned} (1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) x^n \\ &= \ln(1+1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \right] x^n \\ &= (\ln 2)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \right] x^n. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ (cf. début), on a

$$(1-x)S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n = -\ln 2 + \ln 2 = 0.$$

Exercice 5

Soit f l'application définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f .
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Réponse

1. On dérive deux fois f :

$$f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$$

$$f'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\lambda \arcsin x)$$

$$f''(x) = \frac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}} \exp(\lambda \arcsin x) + \frac{\lambda^2}{1-x^2} \exp(\lambda \arcsin x).$$

On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sur $] -R, R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. y' est somme de $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $x \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} ((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n - \lambda^2)a_n) x^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur $] -R, R[$. Par unicité du développement

en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + \lambda^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

De plus, $a_0 = 1$ (car $y(0) = 1$) et $a_1 = y'(0) = \lambda$. On trouve ainsi une unique suite (a_n) solution. On peut calculer explicitement a_n , en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite (a_n) précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n \rightarrow 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-x^2 \neq 0$ sur $] -1, 1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $] -1, 1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.