

Série entière

Exercice 2.

1) On a $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est de rayon de C.V. $R > 0$.

On considère $r \in \mathbb{R}$ tq $0 < r < R$, alors la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

$\Leftrightarrow \exists \pi > 0$ tq $|a_n r^n| \leq \pi, \forall n \in \mathbb{N}$.

soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{a_n x^n}{n!} \right| = \left| a_n r^n \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^n \right|$$

$$\leq \pi \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^n$$

or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(x/r)^n}{n!}$ est abs. cv.

d'où la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ est abs. cv, $\forall x \in \mathbb{R}$. D'où le rayon de C.V. de la série est

2) On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ est de rayon $R > 0$.

On a $\left| \frac{a_n}{n!} \right| \leq \left| \frac{a_n}{n!} \right|$, alors le

rayon de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est $R' \geq R$

$\Rightarrow R' = +\infty$ ou $R' \in \mathbb{R}_+^*$

D'après la 1^{re} question si $R' > 0$

alors le rayon de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ est $+\infty$ ce qui est absurde.

D'où $R' = +\infty$

Exercice 3

1) On a $t \mapsto t^{2n+1} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et positive.

Au voisinage de $+\infty$,

$$t^3 t^{2n+1} e^{-t^2} = t^{2n+4} e^{-t^2} = (t^2)^{n+2} e^{-t^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 t^{2n+1} e^{-t^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow t^{2n+1} e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est intég au v. $(+\infty)$

Alors $t \mapsto t^{2n+1} e^{-t^2}$ est intég au v. $(+\infty)$

$\Rightarrow t \mapsto t^{2n+1} e^{-t^2}$ est intég sur $[0, +\infty[$.

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt < +\infty$$

$$\text{On pose } I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$$

$$u = e^{-t^2}$$

$$u' = -2t e^{-t^2}$$

$$v' = t^{2n+1}$$

$$v = \frac{1}{2n+2} t^{2n+2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2n+2} e^{-t^2} = 0 \text{ et } uv(0) = 0$$

Alors

$$I_n = + \frac{2}{2n+2} \int_0^{+\infty} t^{2n+3} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2}{2n+2} I_{n+1} = \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = (n+1) I_n$$

$$\text{Or } I_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt = 0$$

car $\sin 0 = 0$. $I_n = 0 \Leftrightarrow$ comme $t \mapsto t^{2n+1} e^{-t^2}$ est continue;

positive et intégrable, alors

$$t^{2n+1} e^{-t^2} = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[\text{ imp }$$

$$\Rightarrow I_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} I_{k+1} = \prod_{k=0}^{n-1} (k+1) I_k$$

$$\Leftrightarrow I_n = n! I_0$$

$$\text{Or } I_0 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{I_n = \frac{n!}{2}}$$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}; t \mapsto \sin(tx) e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
 $|\sin(tx) e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}; t \mapsto \sin(tx) e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[\Rightarrow$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$3) f(x) = \int_0^{+\infty} \sin(tx) e^{-t^2} dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, +\infty[$$

$$\sin(tx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (tx)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{Alors } f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (tx)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t^2} dt$$

$$\text{Soit } f_n(x) = \frac{(-1)^n (tx)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t^2}, \quad t \in [0, +\infty[$$

• $\forall n \in \mathbb{N}; f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$

• la série $\sum_{n \geq 0} f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{C.S.} S: t \mapsto \sin(tx) e^{-t^2}$

• S est continue sur $[0, +\infty[$

• la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt =$

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} e^{-t^2} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{n! |x|^{2n+1}}{2(2n+1)!}$$

pose $a_n = \frac{n!}{|x|^{2n+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! |x|^{2n+3}}{n! |x|^{2n+1}} = \frac{|x|^2 \cdot n+1}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'Alembert

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt < \infty$$

Alors d'après T.I.T.T.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ est DSE(0) et

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

↳ Puisque f est DSE(0) alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$\Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n$$

$$a_{2n} = 0 \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0$$

$$\text{et } a_{2n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! a_{2n+1}$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n n!$$

Exercice 4

$$f(t) = \cos(\alpha \arcsin t); \quad \alpha \in \mathbb{R}, t \in]-1, 1[$$

$$1) f'(t) = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin t)$$

$$= -\alpha (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \sin(\alpha \arcsin t)$$

$$\Rightarrow f''(t) = -\alpha \left[\frac{1}{2} - 2t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \sin(\alpha \arcsin t) + (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \alpha \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cos(\alpha \arcsin t) \right]$$

$$= -\alpha \left[t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \sin(\alpha \arcsin t) + \alpha (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(\alpha \arcsin t) \right]$$

$$\Rightarrow (1-t^2) f''(t) = t f'(t) - \alpha^2 f(t)$$

Ainsi f vérifie l'eq diff

$$(E) (1-t^2) y'' - t y' + \alpha^2 y = 0$$

2) Soit y une solution de l'eq diff (E)

DSE(0) $\Rightarrow y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

$$\Leftrightarrow y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$y(0) = a_0 = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = a_1 = 0$$

(B)

y vérifie (E) $\Leftrightarrow$

$$(1-t^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1) t^{n-2} - t \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n t^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2 - n^2) a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (\alpha^2 - n^2) a_n] t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)} a_n$$

Puisque $a_1 = 0$, alors $a_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n+2} = \frac{(2n)^2 - \alpha^2}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n}$$

On vérifie par récurrence que

$$a_{2n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} ((2k)^2 - \alpha^2)}{(2n)!} a_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Alors } y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} ((2k)^2 - \alpha^2)}{(2n)!} x^{2n}$$

est une solution de (E) DSE(0).
vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$

$R=?$

$$\text{On a } \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{\frac{n}{k=0} ((2k)^2 - \alpha^2) z^2}{(2n+2)!} = \frac{(2n)^2 - \alpha^2}{(2n+2)(2n+1)} |z|^2$$

$$\Rightarrow \text{si } |z| < 1 \Rightarrow \sum u_n(z) \text{ abs. CV}$$

$$\text{si } |z| > 1 \Rightarrow \sum u_n(z) \text{ div.}$$

$$\Rightarrow |R|=1$$

3) $\begin{cases} f \text{ est définie sur }]-1,1[\\ f \text{ vérifie (E) avec } f(0)=1 \end{cases}$
et $f'(0)=0$

Alors d'après le th de Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution vérifiant ces conditions qui est la solution trouvée dans question 2)

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} ((2k)^2 - \alpha^2)}{(2n)!} x^{2n} \text{ sur }]-1,1[$$

Page 6

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} ; \quad \varphi_t(x) = \bar{\Phi}(t-x)$$

1) On a la fonction $x \mapsto e^x$ est DSE(0) avec $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

Alors les fonctions $x \mapsto e^{tx}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ sont DSE(0) avec sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{tx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(te)^n}{n!} x^n$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

2) On a $\varphi_t(x) = \bar{\Phi}(t-x) = \frac{e^{-(t-x)^2}}{\sqrt{\pi}}$

$x \mapsto t-x$ est C^∞ et $x \mapsto \bar{\Phi}$ est $C^\infty \Rightarrow \varphi_t$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_t^{(n)}(x) = (-1)^n \bar{\Phi}^{(n)}(t-x)$$

$$\Rightarrow \varphi_t^{(n)}(0) = (-1)^n \bar{\Phi}^{(n)}(t)$$

3) a) $\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2 + 2tx - x^2}$

$$= \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} (e^{2tx} \cdot e^{-x^2})$$

Puisque les fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{2tx}$ sont DSE(0) sur $\mathbb{R}$, alors

la fonction $t \mapsto e^{2tx} \cdot e^{-x^2}$ est DSE(0) sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi_t$ est DSE(0) sur $\mathbb{R}$.

b) Puisque φ_t est DSE(0), alors φ_t est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \varphi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_t^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\varphi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \bar{\Phi}^{(n)}(t)}{n!} x^n$$

c) On a $G_t(x) = e^{tx-x^2} = \sqrt{\pi} e^{t^2} \varphi_t(x)$

$$\text{on } \varphi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \bar{\Phi}^{(n)}(t)}{n!} x^n$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} e^{t^2} \varphi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi} (-1)^n}{n!} e^{t^2} \bar{\Phi}^{(n)}(t) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \bar{\Phi}^{(n)}(t)}{n!} x^n$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} G_t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4) a) On a la série $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(t)}{n!} x^n$ est une série entière de rayon de $\mathbb{C} \setminus \pm \infty$

Alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$G_t'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k H_k(t)}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{(k-1)!}$$

b) On a $G_t(x) = e^{2tx - x^2}$
 $\Rightarrow G'_t(x) = (2t - 2x) G_t(x)$
 $= 2(t-x) G_t(x)$

Alors
 $\forall x \in \mathbb{R}, 2(t-x) G_t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k$ (1)

5) $t \in \mathbb{R}$.

$$H_0(t) = (-1)^0 \frac{\phi^{(0)}(x)}{\phi(x)} = 1$$

$$H_1(t) = - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = 2x$$

D'après (1)

$$\begin{aligned} 2(t-x) G_t(x) &= 2(t-x) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2t H_k(t)}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2 H_{k+1}(t)}{k!} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2t H_k(t)}{k!} x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 H_{k-1}(t)}{(k-1)!} x^k \\ &= 2t H_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2t H_k(t) - 2 H_{k-1}(t)}{k!} \right) x^k \end{aligned}$$

D'après 2)

$$2(t-x) G_t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k$$

Par égalité et unicité du DSE (1), on déduit

$$H_1(t) = 2t H_0(t) + 2x$$

et $H_{k+1}(t) = 2t H_k(t) + 2 H_{k-1}(t)$ (2)

Exercice 7

$\alpha \geq 0$. $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$
 $\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$

1) φ solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$

$$\Leftrightarrow x^2 \varphi''(x) + x \varphi'(x) - (x^2 + \alpha^2) \varphi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = x^\alpha \psi(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \psi(x) + x^\alpha \psi'(x)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \psi(x) + \alpha x^{\alpha-1} \psi'(x) \\ &\quad + \alpha x^{\alpha-1} \psi'(x) + x^\alpha \psi''(x) \\ &= \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \psi(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} \psi'(x) + x^\alpha \psi''(x) \end{aligned}$$

Alors φ solution de $E_\alpha \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 (\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \psi(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} \psi'(x) + x^\alpha \psi''(x)) \\ + x (\alpha x^{\alpha-1} \psi(x) + x^\alpha \psi'(x)) - (x^2 + \alpha^2) x^\alpha \psi(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^{\alpha+2} \psi''(x) + x^{\alpha+1} (2\alpha+1) \psi'(x) - x^{\alpha+2} \psi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x > 0: -x \psi''(x) + (2\alpha+1) \psi'(x) - x \psi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi \text{ vérifie l'eq } E'_\alpha.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n; \quad x \in]-R, R[.$$

$\Leftrightarrow$ solution de $E'_d \Leftrightarrow$

$$x \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_n x^{n-2} + (2\alpha+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2\alpha+1) n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (2\alpha+1)(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)(2\alpha+1+n) a_{n+1} - a_{n-1} \right) x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha a_1 = 0 \\ \forall n \geq 1; \end{cases}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(2\alpha+1+n)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}; \end{cases} a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(2\alpha+n+2)}$$

e) soit $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{4^n n! \Gamma(\alpha+n+1)}$

$$\forall x \neq 0; \quad \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{|x|^2}{4(n+1) \Gamma(\alpha+n+2)}$$

$$= \frac{|x|^2}{4(n+1)(\alpha+n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} < 1$$

D'Alembert la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ cv.
 $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où son rayon est $+\infty$.

b) donc la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n! \Gamma(\alpha+n+1)} \text{ est une solution de } (E'_d) \text{ (d'après 1.)}$$

$\psi(x) = \frac{x^\alpha}{2} \varphi(x)$ est une solution de (E_d) .

$$\psi(x) = \frac{x^\alpha}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n! \Gamma(\alpha+n+1)}$$

Exercice 8

$$x \in \mathbb{R}; \quad G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx} dt$$

$$\Downarrow \text{ soit } f(x, t) = e^{-t^2} e^{-itx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

• $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\forall t \geq 0, x \mapsto f(x, t)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = (-it)^n e^{-t^2} e^{-itx}$$

• $\forall n \in \mathbb{N}; t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est continue et

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq t^n e^{-t^2} = \varphi_n(t) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

φ_n est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

car Au $v(t)$. $t^2 \varphi_n(t) = t^{n+2} e^{-t^2}$
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^2 \varphi_n(t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n+2} e^{-x} = 0$

$\Rightarrow \varphi_n = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au $v(\pm\infty)$
 alors φ_n est intégrable au $v(\pm\infty)$

Ainsi G est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et
 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}; G^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (-it)^n e^{-t^2} e^{-itx} dt$

e) D'après 1/

$G'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it e^{-t^2} e^{-itx} dt$

IPP
 $u = e^{-itx} \quad u' = t e^{-itx}$
 $v = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \quad v' = -t e^{-t^2}$

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |u(t)v(t)| = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} e^{-t^2} = 0$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t)v(t) = 0$

D'où $G'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{-t^2} e^{-itx} dt$
 $= -i \left(-\frac{ix}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx} dt$
 $= -\frac{1}{2} x G(x)$

$\Rightarrow G$ vérifie l'éq diff.

(E) $y' + \frac{x}{2}y = 0$

3) y solution de (E) $\Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}, x \in \mathbb{R}$

Puisque G solution de (E), alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

t.q. $G(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}, \forall x \in \mathbb{R}$.

or $G(0) = \lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

$\Rightarrow G(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}, \forall x \in \mathbb{R}$

u) G est DSE(0) avec.

$G(x) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi} \frac{(-1)^n}{4^n}}{n!} x^{2n}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{G^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^n}{n! 4^n}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, G^{(2n)}(0) = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^n}{n! 4^n} (2n)!$

5) $m \in \mathbb{N}$.

a) La fonction $t \mapsto t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue, positive et paire.

Au $v(+\infty)$.

$1 + \frac{t^2}{n} \sim \frac{t^2}{n} \Rightarrow t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \sim \frac{t^{2m} \cdot t^{-2n}}{n^{-n}} = \frac{1}{t^{2(n-m)}} \sim \frac{1}{t^{2(n-m)}}$

$\Rightarrow t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est intégrable au $v(+\infty)$ si $2(n-m) > 1 \Leftrightarrow n-m > \frac{1}{2}$.

que $m, n \in \mathbb{N}$, ce ci est vrai
 SSi $n > m$.

b) soit $g_t(x) = -x \ln(1 + \frac{t^2}{x})$, $x \in [1, +\infty[$
 g_t est dérivable sur $[1, +\infty[$:

$$\forall x \geq 1: g'_t(x) = -x \cdot \frac{-\frac{t^2}{x^2}}{1 + \frac{t^2}{x}} - \ln(1 + \frac{t^2}{x})$$

$$= -\ln(1 + \frac{t^2}{x}) + \frac{t^2}{x + t^2}$$

$$g''_t(x) = \frac{\frac{t^2}{x^2}}{1 + \frac{t^2}{x}} - \frac{t^2}{(x + t^2)^2}$$

$$= t^2 \left(\frac{1}{(x + t^2)x} - \frac{1}{(x + t^2)^2} \right)$$

$$= t^2 \left(\frac{x + t^2 - x}{x(x + t^2)^2} \right) = \frac{t^4}{x(t^2 + x)^2}$$

$\Rightarrow g''_t \geq 0 \Rightarrow g'_t$ est $\nearrow$ sur $[1, +\infty[$

or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'_t(x) = 0$

$\Rightarrow g'_t(x) \leq 0, \forall x \geq 1$

$\Rightarrow g_t$ est $\searrow$ sur $[1, +\infty[$

On déduit que :

$$-(n+1) \ln(1 + \frac{t^2}{n+1}) \leq -n \ln(1 + \frac{t^2}{n})$$

$$\Rightarrow e^{-(n+1) \ln(1 + \frac{t^2}{n+1})} \leq e^{-n \ln(1 + \frac{t^2}{n})}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{t^2}{n+1}\right)^{-(n+1)} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

$$\Leftrightarrow \text{la suite } \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}_{n \geq 1} \text{ est } \searrow.$$

$$c) \text{ Par } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{t^2}{m}}^{+\frac{t^2}{m}} t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{m!} \frac{(2m)!}{4^m}$$

Soit $f_n(t) = t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$; $t \in \mathbb{R}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$

$$\bullet \forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

$$= t^{2m} e^{-t^2}$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{sur } \mathbb{R}]{\text{CS}} f: t \mapsto t^{2m} e^{-t^2}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$

$\bullet \forall n > m, \Leftrightarrow n \geq m+1$

$$|f_n(t)| \leq t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{m+1}\right)^{-(m+1)} = \varphi(t).$$

(car la suite $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est $\searrow$)

φ est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $(m+1 > m)$

Ainsi $\xrightarrow{\text{T.C.D.}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{t^2}{m}}^{+\frac{t^2}{m}} t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} e^{-t^2} dt$$

$$= (i) \Gamma\left(\frac{2m}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{m!} \frac{(2m)!}{4^m}$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \frac{(e m)!}{m! 4^m}$$

c) Seien $n > m \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (nu)^{2m} (1+u^2)^{-n} \frac{1}{\sqrt{n}} du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^n} n du \cdot n^{m+\frac{1}{2}} du$$

$$= n^{m+\frac{1}{2}} \cdot J_{n,m}$$

$$7) \text{ Hier } J_{n+1,m} = \left(1 - \frac{2m+1}{2n}\right) J_{n,m}$$

$$\text{Denn: } J_{n+1,m} - J_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^{n+1}} - \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^n} du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^n} n \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1+u^2}{1+u^2} \right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m+2}}{(1+u^2)^{n+1}} du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m+1} \cdot u \cdot (1+u^2)^{-(n+1)} du$$

$$\frac{I_{pp}}{f} = u^{2m+1}$$

$$f' = (2m+1) u^{2m}$$

$$g' = u(1+u^2)^{-n}$$

$$g = \frac{1}{-2n} (1+u^2)^{-n}$$

(10)

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n} \left(\frac{u^{2m+1}}{(1+u^2)^n} \right) = 0$$

$\uparrow$
 $2n > 2m$
 $2n > 2m$

$$\text{Denn: } J_{n+1,m} - J_{n,m} = -\frac{2m+1}{2n} J_{n,m}$$

$$8) J_{m+1,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^{m+1}} du$$

$$\frac{I_{pp}}{f} = \frac{u^{2m-1}}{2m} J_{m,m-1}$$

$$9) \forall m, k: J_{m,k} \neq 0$$

$$\text{et on a: } J_{m+1,m} = \frac{2m-1}{2m} J_{m,m-1}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^m J_{k+1,k} = \prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k} J_{k,k-1}$$

$$J_{m+1,m} = \prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k} \cdot J_{1,0}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2m-1}{2^m m!} J_{1,0}$$

$$= \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} J_{1,0} = \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} \pi$$

$$10) \text{ Seien } n > m+1.$$

$$\text{Denn: } \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = n^{m+\frac{1}{2}} J_{n,m}$$

$$\text{or } J_{k+1,m} = \left(1 - \frac{2m+1}{2k}\right) J_{k,m}$$

$\forall k \geq m$

$$\Rightarrow \prod_{k=m+1}^{n-1} J_{k+1,m} = \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{m+1}}{2^k}\right) J_{k,m}$$

$$J_{n,m} = \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{m+1}}{2^k}\right) J_{m+1,m}$$

$$\frac{(2^m)! \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{m+1}}{2^k}\right)}{(2^n m!) e^{\frac{1}{2^n m!}}}$$

$$1.1) \ln(1-b) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n}; \forall b \in]-1, 1[$$

$$1.2) \text{ On a } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2^m} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \cdot (2^m)!}{m! 4^m}$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{m!} \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{m+1}}{2^k}\right)$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{m!} \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{m+1}}{2^k}\right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(m + \frac{1}{2}\right) \ln n + \frac{1}{2} \ln \pi - \ln m! + \sum_{k=m+1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2^{m+1}}{2^k}\right) \right)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left((2^{m+1}) \ln n - \sum_{k=m+1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{2^{m+1}}{2^k}\right) \right)$$

$$= \ln \pi - 2 \ln m!$$