

## 0.1

0.1.1 On a  $X^2 + 2\lambda X + 1 = (X - z_1)(X - z_2)$  donc  $z_1 + z_2 = -2\lambda$  et  $z_1 z_2 = 1$ .

0.1.2 Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $z_1 = e^{i\theta}$ , alors  $z_2 = \frac{1}{z_1} = e^{-i\theta}$ , on en déduit que  $\lambda = -\cos \theta$  ce qui contredit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

0.1.3 De la question précédente  $|z_1| \neq 1$  et  $|z_2| \neq 1$  ( $z_1$  et  $z_2$  jouent un rôle symétrique) et  $|z_1||z_2| = 1$ , forcément l'une des deux racines est plus petite en module que 1 et l'autre et plus grande que 1, par exemple  $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$ .

0.2 La décomposition en éléments simples s'écrit :  $\frac{1}{P_\lambda(X)} = \frac{a}{X - z_1} + \frac{b}{X - z_2}$  avec

$$a = \left[ \frac{X - z_1}{P_\lambda(X)} \right]_{X=z_1} = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad \text{et} \quad b = \left[ \frac{X - z_2}{P_\lambda(X)} \right]_{X=z_2} = \frac{1}{z_2 - z_2}$$

Ainsi

$$\frac{1}{P_\lambda(X)} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left( \frac{1}{X - z_1} - \frac{1}{X - z_2} \right)$$

## 0.3

0.3.1 Soit  $x \in \mathbb{R}$ , la formule d'Euler donne

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \frac{2}{2\lambda + e^{ix} + e^{-ix}} \\ &= \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} + 2\lambda e^{ix} + 1} \\ &= \frac{2e^{ix}}{P_\lambda(e^{ix})} \end{aligned}$$

0.3.2 De la question 0.2 on a

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \frac{2e^{ix}}{z_1 - z_2} \left( \frac{1}{e^{ix} - z_1} - \frac{1}{e^{ix} - z_2} \right) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \left( \frac{e^{ix}}{e^{ix} - z_1} - \frac{1}{e^{ix} - \frac{1}{z_1}} \right) \quad (\text{car } z_1 z_2 = 1) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \left( \frac{1}{1 - e^{-ix} z_1} + \frac{z_1 e^{ix}}{1 - e^{ix} z_1} \right) \end{aligned}$$

0.3.3 On a  $0 < |z_1| < 1$  et  $|z_1^n \cos(nx)| \leq |z_1|^n$ , la série  $\sum_{n \geq 1} |z_1|^n$  converge donc  $\sum_{n \geq 1} z_1^n \cos(nx)$  est absolument convergente.

Nous avons

$$\frac{1}{1 - e^{-ix} z_1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z_1^n e^{-inx}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{z_1 e^{ix}}{1 - e^{ix} z_1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z_1^{n+1} e^{i(n+1)x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n e^{inx} \end{aligned}$$

$$F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n (e^{inx} + e^{-inx}) \right) \\ = \frac{2}{z_1 - z_2} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n \cos(nx) \right).$$

0.4

0.4.1 On a  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |w_n(x)| = |z_1|^n$  et  $|z_1| < 1$  donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} w_n$  converge normalement et uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

0.4.2 Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $t \in [-\pi, \pi]$ , de la question 0.3.3 on a

$$\cos(pt) F_\lambda(t) = \frac{\cos(pt)}{\lambda + \cos t} = \frac{2}{z_1 - z_2} \left( \cos(pt) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n \cos(pt) \cos(nt) \right).$$

Soit  $f_n : t \mapsto z_1^n \cos(pt) \cos(nt)$ , la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  et donc sur  $[-\pi, \pi]$ .  
théorème d'interversion de  $\sum$  et  $\int$  donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(pt)}{\lambda + \cos t} dt = \frac{2}{z_1 - z_2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt) dt + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt) \cos(nt) dt \right).$$

De la formule

$$\cos(pt) \cos(nt) = \frac{1}{2} (\cos((p+n)t) + \cos((p-n)t))$$

on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt) \cos(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \pi & \text{si } n = p \quad (\neq 0) \end{cases}$$

On distinguant les cas  $p \neq 0$  et  $p = 0$ , on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(pt)}{\lambda + \cos t} dt = \frac{4\pi z_1^p}{z_1 - z_2}.$$

Et par parité on a

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\cos(pt)}{\lambda + \cos t} dt = \frac{2\pi z_1^p}{z_1 - z_2}.$$

0.5 Si  $\lambda = 2$  alors  $z_1 = -2 + \sqrt{3}$  et  $z_2 = -2 - \sqrt{3}$  donc

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t} dt = \frac{\pi \sqrt{3} (-2 + \sqrt{3})^n}{3}}$$

Si  $\lambda = \cosh a$ , avec  $a > 0$ , alors  $z_1 = e^{-a}$  et  $z_2 = e^a$  donc

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\cosh t + \cosh a} dt = \frac{-\pi e^{-na}}{\sinh(a)}}$$

## IV Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Q 30. Puisque le rayon de convergence est infini,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

On en déduit que  $f$  est solution de  $(E_p)$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 &\iff \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff p a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n+1) a_{n+1} + (p-n) a_n) x^n = 0 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière on en déduit que  $f$  est solution de  $(E_p)$  si et seulement si  $a_0 = 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $n(n+1) a_{n+1} = (n-p) a_n$ .

### IV.A – Recherche de solutions polynomiales

Q 31. Une solution polynomiale est une solution développable en série entière telle que la suite  $(a_n)$  soit nulle à partir d'un certain rang. Compte tenu de la relation de récurrence obtenue, il existe des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement s'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que  $a_N \neq 0$  et  $a_{N+1} = 0$ , soit encore si et seulement si  $p = N \in \mathbb{N}^*$ . Il s'agit alors de fonctions polynomiales de degré  $N = p$  s'annulant en 0, qui appartiennent à  $E$  d'après la question 2.

Q 32. On calcule  $h'(x) = e^{-x}(P'(x) - P(x))$  et  $h''(x) = e^{-x}(P''(x) - 2P'(x) + P(x))$  donc :

$$x(h''(x) + h'(x)) + p h(x) = e^{-x} (x(P''(x) - P'(x)) + p P(x)) = 0$$

car  $P$  est solution de  $(E_p)$ .  $h$  est bien solution de l'équation différentielle  $x(y'' + y') + p y = 0$ .

Q 33. Les fonctions  $x \mapsto e^{-x}$  et  $P$  sont développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  donc par produit de Cauchy leur produit  $h$  aussi.

Q 34. Prouvons la formule demandée par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  :

- si  $n = 1$  la formule est une évidence ;
- si  $n \geq 1$ , supposons la formule acquise au rang  $n$ . Alors

$$b_{n+1} = -\frac{(n+p)}{n(n+1)} b_n = -\frac{(n+p)}{n(n+1)} \times \frac{(-1)^{n-1} (n+p-1)!}{p! n! (n-1)!} b_1 = \frac{(-1)^n (n+p)!}{p! n! (n+1)!} b_1$$

donc la récurrence se propage.

**Q 35.** La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  donc  $g_p$  aussi, avec :  $\forall x \in \mathbb{R}, g_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+p-1}}{n!}$ .  
 On en déduit que  $g_p^{(p)}$  est elle aussi développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ , et que son développement s'obtient en dérivant  $p$  fois terme à terme :  $g_p^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!} x^{n-1}$ .  
 On constate alors que  $b_1 x g_p^{(p)}(x) = p! h(x) = p! e^{-x} P(x)$  donc  $P(x) = C x e^x g_p^{(p)}(x)$  avec  $C = \frac{b_1}{p!}$ .

#### IV.B – Solutions développables en séries entières non polynomiales

**Q 36.** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  on définit une unique suite  $(a_n)$  en posant  $a_0 = 0, a_1 = \lambda$  et pour tout  $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{n-p}{n(n+1)} a_n$ . Cette suite est non nulle à partir du rang 1 car  $p \notin \mathbb{N}^*$ .

On a  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$  donc d'après le critère de d'Alembert la série entière  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  a un rayon de convergence égal à  $+\infty$ , et d'après la question 30,  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_p)$ .

**Q 37.** Pour tout  $n \geq p, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n-p}{n(n+1)}$  et pour tout  $n \geq 2p, \frac{n-p}{n} \geq \frac{1}{2}$  donc en posant  $q = [2p] + 1$  on a :  $\forall n \geq q, |a_{n+1}| \leq \frac{|a_n|}{2(n+1)}$ .

**Q 38.** Prouvons la minoration demandée par récurrence sur  $n \geq q$  :

– si  $n = q$  le résultat est évident ;

– si  $n \geq q$ , supposons le résultat acquis au rang  $n$  ; alors  $|a_{n+1}| \geq \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{q!|a_q|}{2^{n-q}n!} = \frac{q!|a_q|}{2^{n+1-q}(n+1)!}$  donc la récurrence se propage.

**Q 39.** La série entière  $\sum \frac{x^n}{2^n n!}$  a un rayon de convergence infini (sa somme vaut  $e^{x/2}$ ) donc pour tout  $x > 0$ ,

$$\psi(x) \geq q!|a_q| \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n-q}n!} = 2^q q!|a_q| (e^{x/2} - Q(x)) \quad \text{où} \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{x^n}{2^n n!}$$

Puisque  $a_q \neq 0$  on a  $e^{x/2} = O\left(\psi(x)\right)$  et donc  $\frac{1}{x} = O\left(\psi(x)^2 \frac{e^{-x}}{x}\right)$ .

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge donc il en est de même de  $\int_1^{+\infty} \psi(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt$  ; la fonction  $\psi$  n'appartient pas à  $E$ .

**Q 40.** La relation de récurrence vérifiée par la suite  $(a_n)$  montre que cette dernière est de signe constant pour  $n > p$  et donc a fortiori à partir de rang  $q$ . Il existe donc  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tel que  $f(x) = R(x) + \varepsilon \psi(x)$ , où  $R(x) = \sum_{n=1}^{q-1} a_n x^n$ .  $E$  étant un espace vectoriel, on a  $R \in E$  (question 2) et  $\psi \notin E$  donc  $f \notin E$ .