

Remarque

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{b \in [0, R[} R > 0$

$$\int_0^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^b a_n x^n$$

$$b < R.$$

$$C \cup_{n \in \mathbb{N}} [0, b] \subset]-R, R[.$$

Ex. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

Req. Appl. th. de permutation

Rep. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1} dx$

2) soit $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Th. f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner $f^{(n)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Rep.

$$\forall x \neq 0; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} - 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = 1$$

or $f(0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \Big|_{x=0} = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

$\Rightarrow$ f est DSE(0) sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

et $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{* Bq. } \sum_{n \geq 0} n a_n z^n \text{ am } \text{naupnq} \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

$\downarrow_{R'}$ $\downarrow_R$

Bq. $R = R'$

$$\forall n \geq 1; |n a_n| \geq |a_n| \Rightarrow R' \leq R.$$

Sil. $z \in \mathbb{C}$ s.t. $|z| < R$.

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |z| < n < R$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n n \text{ ist abs. conv.}$$

$$|n a_n z^n| = |n a_n z^n| \cdot \frac{1}{n} = |a_n z^n|$$

$$\text{or } |z| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |n a_n z^n| = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} |n a_n z^n| < \infty$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| < R$$

$$\Rightarrow R' \geq R.$$

Question

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n \leadsto R > 0$

Pq. $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ est de rayon $+\infty$

Soit $0 < r < R \Rightarrow (a_n r^n)$ bornée.

$\forall x \in \mathbb{R}; \left| \frac{a_n x^n}{n!} \right| = \left| a_n r^n \right| \cdot \left| \frac{x^n}{n! r^n} \right|$

$\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n! r^n} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n!} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est cv, $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow R = +\infty$

Exercice 3

1) Représenter $+I_{pp}$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sin(tx) e^{-te} dt, t \in \mathbb{R}.$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}; t \mapsto \sin(tx) e^{-te}$ est cv

$$e^{-te} \sin(tx) \leq e^{-te} = \frac{\sin(tx)}{t} e^{-te}$$

$\Rightarrow \sin(tx) e^{-te} \leq \frac{\sin(tx)}{t} e^{-te}$

$\Rightarrow t \mapsto \frac{1}{t} e^{-te}$ est bornée

$\Rightarrow f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3) $\forall x, \forall t$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (tx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (tx)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-tx} dt$$

with $f_n(t) = \frac{(-1)^n (tx)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-tx}$

then $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^\infty$ et integrable sur $[0, +\infty[$ d'après 1/.

• $\sum_{n \geq 0} f_n \in C^\infty$ sur $[0, +\infty[\rightarrow S: t \mapsto \sum_{n \geq 0} f_n(t)x = te^{-tx}$

• Soit $t \in C^\infty$ sur $[0, +\infty[$

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-tx} dt$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{x} = \sum_{n \geq 0} \frac{|x|^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{|x|}{e}$$

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{|x|}{e} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt < \infty$$

Alon d'après T. S. T.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} e^{-t} \frac{d^n}{dt^n} \right) \cdot x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} x^{(2n+1)}, x \in \mathbb{R}.$$

4) f est DSE(0) sur $\mathbb{R}$.

Alon f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

et $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}$$

$$f^{(k)}(0) = 0$$

Exercice 4.

$$f(t) = \cos(\alpha \arcsin t); \alpha \in \mathbb{R}$$

1) f vérifie l'eq. diff.

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$$

2) Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow \mathbb{R}$ et vérifie l'eq. diff.

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (1^2 - n^2)a_n] x^n = 0$$

Par unicité du DSE(0), on a donc

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (1^2 - n^2)a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{n^2 - 1}{(n+2)(n+1)} a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2n+2} = \frac{(2n)^2 - 1}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n} \\ a_{2n+3} = \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+3)(2n+2)} a_{2n+1} \end{cases}$$

or $y(0) = a_0 = 1$ et $y'(0) = a_1 = 0$
 $a_1 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$

Par récurrence on vérifie...

$$a_{2n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (4k^2 - 1)}{(2n)!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} 2n x^{2n-1}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} x^{2n}$$

Remarks.

Remarks.

$$\Rightarrow a_{2n} = 0, \forall n \geq n_0 + L.$$

$$\frac{n-1}{n} \left((2k)^2 - \alpha^2 \right)$$

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Friction
polyamide
P=eq.

3) on a. précifie l'eq diff
et $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

D'après le th. de Courcley-Lipshitz.

$$y(x) = f(x), \quad \forall x \in J - R, K \subset J - I \cup C.$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

$$R = ??$$

$\therefore \text{G. 2022} \rightarrow R = \infty$
 G. 2022

$\frac{u_n(x)}{u_1(x)} = \left| \frac{a_{n+1} x}{a_1} \right|$

$$\left| \frac{W_{n+1}(x)}{W_n(x)} \right| = \left| \frac{a_{n+1} x}{a_n} \right| / |x| =$$

$$= \frac{(q_n)^2 q_2}{(q_{n+2})(q_{n+1})} \cdot h_2/e$$

$$D(P_{\text{sub}}) = \frac{(2n)^2 \cdot 2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

Exercice 4" Serie II"

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \rightarrow R > 0 \text{ et } a_0 = 1.$$

1) $R = \sup \{ r > 0 \text{ tq. la suite } (a_n r^n) \text{ bornée} \}$

ona $r < R \Rightarrow$ la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

$$\Rightarrow \exists N \geq 0 \text{ tq } |a_n r^n| \leq N, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \leq N + 1 = K$$

$$|a_n| \leq \frac{K}{r^n} \leq \frac{K}{r^n} = \left(\frac{K}{r}\right)^n.$$

2) $b_0 = 1, K \geq 1, b_n = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{n-j}$

Pour $n=0 \Rightarrow b_0 = 1 \leq \left(\frac{K}{r}\right)^0 = 1$ vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $a_i, |b_i| \leq \left(\frac{K}{r}\right)^i$ et montrons le pour b_{n+1} .

$$|b_{n+1}| \leq \sum_{j=0}^n |a_j| |b_{n+1-j}|$$
$$\leq \sum_{j=0}^n \left(\frac{K}{r}\right)^j \left(\frac{K}{r}\right)^{n+1-j}$$
$$\leq \left(\frac{K}{r}\right)^{n+1} \cdot (n+1) \leq \left(\frac{K}{r}\right)^{n+1} \cdot K \leq \left(\frac{K}{r}\right)^{n+1}$$

$\forall 1 \leq j \leq n+1, \quad 0 \leq n+1-j \leq n$
 $\Rightarrow \text{H.R. } |b_{n+1}| \leq \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{k}{e}\right)^j \cdot \left(\frac{2k}{e}\right)^{n+1-j}$
 $\leq \left(\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{2k}{e}\right)^j\right) \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^{n+1}$
 $\stackrel{(\text{H.R.})}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{e^j}\right) \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^{n+1}$
 $\Rightarrow |b_{n+1}| \leq \left(\frac{2k}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}}$
 $\stackrel{(\text{H.R.})}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2k}{e}\right)^{n+1}$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} b_n z^n \text{ est borné sur } R_T$
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} b_n z^n \text{ est borné sur } R_T$
 $R_T \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2k}{e}\right)^{n+1}$

$6) \quad R' = \min(R, R_T) ; |z| < R'$
 $S(z) \cdot T(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
 $\text{avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$
 $c_0 = a_0 b_0 = 1$
 $k \geq 1; \quad c_n = b_n + \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = 0$
 $\Rightarrow S(z) \cdot T(z) = 1, \quad \forall z \in D(0, R')$
 $\Rightarrow \exists T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ tel que } T(z) = \frac{1}{S(z)}$

Exercise 6 "Serie 6".

2) $\chi_f(x) = \mathbb{I}(f-x)$

$$x \mapsto t-x \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \in C^\infty_{\text{comp}} \mathbb{R}$$

Dieses χ^2 ist χ^2 aus IR

$$\forall n \in \mathbb{N}; \varphi_t^{(n)}(x) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t-x)$$

$$\Rightarrow \varphi_t^{(n)}(0) = (-1)^n \varphi^{(n)}(t)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

24. 2. 2020

[illegible]

$DSE(f) \text{ over } R = \mathbb{C}$
 " " " "
 " " " "

11

$\Rightarrow x \mapsto e^{\frac{2+x}{2}} e^{-x^2}$ est DSE(0) avec $R \geq \min(\cdot, \cdot) = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \gamma_t \in \text{DSE}(0) \text{ per } \mathbb{R}_+$$

b) ma ζ_t est DSE(0), alors.

$$C_T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_T^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

c) onidentg.

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{(-1)^k}{t^k} \cdot \frac{H(t)}{t} \cdot \frac{\Phi(t)}{t} \cdot x^k \, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{H(t)}{t} \cdot \frac{\Phi(t)}{t} \cdot x^k \, dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$