

* sat $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ serie entiere
 domain $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \Sigma$ cv. si $|x| < 1$
 div si $|x| > 1$.

Pour $x = 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ cv
 $x = -1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ div.

$\Rightarrow D_f =]-1, 1[$

* Tr. f continue sur D_f .

* $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ serie entiere
 domain $\mathbb{C}$.
 $\Rightarrow f$ continue sur $]-1, 1[$.

li $f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

$\stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = f(1)$

* Theor. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \exists < \infty$.

* $\forall x \in]0, 1[$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ entaltes
 verif. T.S.A.

$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$
 $\sup_{x \in]0, 1[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n \subset \mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, 1[$.

Donc f continue sur $]-1, 1[$.
 $\Rightarrow f$ continue sur $]-1, 1[$.

Prop $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leadsto R=1.$

et $\sum_{n \geq 0} a_n$ est abscv.

Mon fct définie et continue sur $[1,1]$

Cas $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ CV sur $[1,1] \Rightarrow \subset U.$

Exerc 5: a70

1) $\varphi(x) = \frac{1}{\sinh a - \cosh x}$

2) $\varphi(x) = \frac{-e e^x}{(e^x - e^a)(e^x - \bar{e}^a)}$

e) a). $F(x) = \frac{-ex}{(x - e^a)(x - \bar{e}^a)}$

$= \frac{\alpha}{x - e^a} + \frac{\beta}{x - \bar{e}^a}$

$\alpha = -\frac{e^a}{\sinh a}$ et $\beta = \frac{\bar{e}^a}{\sinh a}$

b) $\varphi(x) = -\frac{e^a}{\sinh a} \frac{1}{e^x - e^a} + \frac{\bar{e}^a}{\sinh a} \frac{1}{e^x - \bar{e}^a}$

$= \frac{1}{\sinh a} \frac{1}{1 - e^{ix-a}} + \frac{\bar{e}^a}{\sinh a e^{ix}} \cdot \frac{1}{1 - \bar{e}^{ix-a}}$

$|e^{ix-a}| = |\bar{e}^{ix-a}| = \bar{e}^a < 1$

$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sinh a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{ix-a})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{e}^{ix-a})^n \right)$

$= \frac{1}{\sinh a} + \frac{1}{\sinh a} \sum_{n=1}^{\infty} 2\bar{e}^{na} (\cos nx)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cos nx$ avec $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = \frac{1}{\sinh a} \\ \gamma_n = \frac{2\bar{e}^{na}}{\sinh a}, n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

a) $I_n = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx$; $n \in \mathbb{N}$

$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\varphi(x) \cos(nx)}_{g_k(x)} dx$

$\forall k \in \mathbb{N}$, g_k est continue sur $[0, 2\pi]$

$$|g_k(u)| \leq \gamma_k \Rightarrow \sup_{u \in [0, 2\pi]} |g_k(u)| \leq \gamma_k$$

$$\text{or } \sum_{k \geq 0} \gamma_k = \sum_{k \geq 1} \frac{2e^{-ka}}{ka} \text{ CV. } (= O(\frac{1}{k^a}) \text{ } a > 0)$$

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 1} g_k \text{ CV} \Rightarrow \text{CV sur } [0, 2\pi].$$

$$\text{Il est. } I_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_0 = 2\pi \gamma_0 = \frac{2\pi}{ka} \\ I_n = \pi \gamma_n = \frac{2\pi e^{-na}}{ka} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{théor. } I_n = \frac{2\pi e^{-na}}{ka} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

II) - hyp φ admet un DSE(0)

) on a φ admet un DSE(0)
 φ est paire, alors

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^{2p}$$

$$b_0 = \varphi(0) = \frac{1}{cha-1}$$

$$b_1 = \frac{\varphi''(0)}{2} = ??$$

$$\text{on a } \varphi(x) = \frac{1}{cha \cdot \cos x} = \frac{1}{cha-1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$$= \frac{1}{(cha-1)} \frac{1}{1 + \frac{1}{2(cha-1)} x^2 + o(x^2)}$$

$$= \frac{1}{cha-1} \left(1 - \frac{1}{2(cha-1)} x^2 + o(x^2) \right)$$

$$= \frac{1}{cha-1} - \frac{1}{2(cha-1)^2} x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Alors } b_1 = -\frac{1}{2(cha-1)^2}$$

$$s) \quad \varphi(x) \cdot (cha - \cos x) = 1$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} \right) \cdot \left(cha - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right) = 1$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha_{2n} = b_n \\ \alpha_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0 = cha-1 \\ \beta_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \\ \beta_{2n+1} = 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$C_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \cdot \beta_{2n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \alpha_{2k} \beta_{2n-2k} \quad (\text{car } \alpha_{2k+1} = 0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} d_{k,n} \beta_{n-k} + d_{n,n} \beta_0$$

$$C_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{(-1)^{n-k+1}}{(2n-2k)!} + (cha-1) \cdot b_n$$

Donc $C_0 = 1 = d_0 \beta_0 = b_0(cha-1) = 1$

et $C_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{cha-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k (-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}$$

4) Pour $n=0$; $|b_0| = \frac{1}{cha-1} \leq \frac{a^0}{cha-1}$ vrai.
 Soit $n \in \mathbb{N}$; Supp le résultat et vrai pour $k \leq n$
 et montrons pour $n+1$.

$$|b_{n+1}| \leq \frac{1}{cha-1} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{(2n+2-2k)!}$$

$$\stackrel{(H.R.)}{\leq} \frac{1}{(cha-1)^2} \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k}}{(2n+2-2k)!}$$

$$\leq \frac{1}{(cha-1)^2} \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k}}{(2n+2-2k)!}$$

$$(k_i = n+1-k) \Rightarrow |b_{n+1}| \leq \frac{1}{(cha-1)^2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^{n+1-2k+1+2k}}{(2k)!}$$

$$\leq \frac{a^{-2(n+1)}}{(cha-1)^2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^{2k}}{(2k)!}$$

$$\leq \frac{a^{-2(n+1)}}{(cha-1)^2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{a^{-2(n+1)}}{cha-1}$$

$$|b_{n+1}|$$

$$\leq \frac{a^{-2(n+1)}}{cha-1}$$

$$5) \text{ on a } |b_n| \leq \frac{a^{-2n}}{cha-1} = d_n$$

$$\Rightarrow R_b \geq R_{\text{region } d_n}$$

$$\Rightarrow R_b \geq a > 0$$

$$a = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^{-2k}}{(2k)!} \geq d_n$$

$$6) \text{ on pose } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos z = cha \Leftrightarrow$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2cha$$

$$\text{soit } e^{iz} + 1 - e e^{iz} cha = 0$$

$$X = e^{iz}$$

$$X^2 - eX cha + 1 = 0$$

$$(X - e^{-a})(X - e^a) = 0 \quad \Delta = \dots$$

$$X = e^a \text{ ou } X = e^{-a}$$

$$e^{iz} = e^a \text{ ou } e^{iz} = e^{-a}$$

$$\Rightarrow z = x + iy$$

$$\Rightarrow e^{ix-y} = e^a \text{ ou } e^{ix-y} = e^{-a}$$

$$\Rightarrow e^{ix} = e^a \text{ ou } e^{ix} = e^{-a}$$

$$\Rightarrow e^{-y} = e^a \text{ ou } e^{-y} = e^{-a}$$

$$\Rightarrow e^{ix-y} = e^a \text{ ou } e^{ix-y} = e^{-a}$$

$$x \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Def $S_\alpha = \{ e^{k\pi i} \pm i\alpha, k \in \mathbb{Z} \}$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sim R = R_b$$

$$i) \text{ si } |z| < R, S(z) (cha - \cos z) = 1.$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n + (-iz)^n}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n z^n}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow S(z) (cha - \cos z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) \left(cha - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!} \right) = 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ on } \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$\text{Def } R = \sup \{ r > 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ bornee} \}$$

ii) Supp quo. $R > a$.

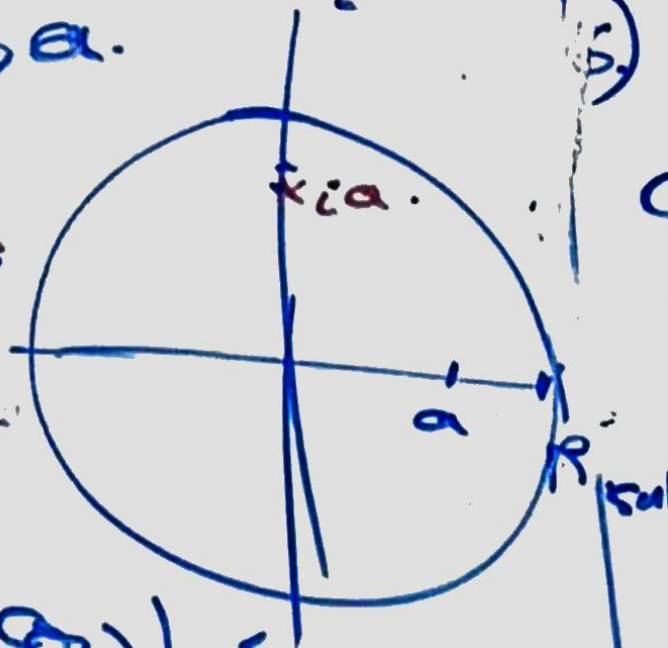
Alors. Set define

sur $D_R \Rightarrow$
Set define en ia

or

$$S(z) \cdot (\text{cha} - \text{co}z) = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{S(ia) \cdot (\text{cha} - \text{co}ia)}_{=0} = 1.$$



ou bien

$$\lim_{z \rightarrow ia} |S(z)| = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{|\text{cha} - \text{co}z|} = +\infty.$$

Donc

$$\underbrace{R}_{=a} \Rightarrow R \leq |ia|$$

pas continu en a

Exercice 8:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-itx} dt$$

$$1) G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x,t) \text{ est } C^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = (-it)^n e^{tx} e^{-itx}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \text{ est } C^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \right| \leq |t|^n e^{tx} e^{-itx} = \varphi(t)$$

$$\varphi \text{ est } C^{\infty} \text{ et int\'egrable sur } \mathbb{R}.$$

$$\varphi \text{ est pair}$$

$$\Rightarrow G \text{ est } C^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\varphi(t) = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

$$\text{et } G^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^n e^{tx} e^{-itx} dt$$

$$2) G'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it) e^{tx} e^{-itx} dt$$

$$\text{Ipp. } u = e^{itx} \rightarrow u' = ix e^{itx}$$

$$v = t e^{tx} \rightarrow v' = e^{tx}$$

$$|u'v - uv'| = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} e^{2tx}$$

$$\Rightarrow G'(x) = -x \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-itx} dt$$

$$= -x G(x)$$

$$\Rightarrow G \text{ est } C^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } y' + xy = 0$$

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-itx} dt$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-itx} dt$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R}; G(x) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{n!} \frac{(-1)^n}{4^n} x^{-2n}$$

$$\rightarrow G^{(2m)}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{m!} \frac{(-1)^m}{4^m} \cdot (2m)!$$

5) $m \in \mathbb{N}$.

2) $t \mapsto t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est C.P. sur $\mathbb{R}$ et pair

$$t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \sim \frac{t^{2m} \cdot e^{-n}}{t^{2n}} = \frac{1}{t^{2(n-m)}}$$

qui est intégrable au voisinage de 0 (car)

$$\text{car } e(n-m) > 1$$

$$\Leftrightarrow n-m > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n-m \geq 1 \quad (n-m \in \mathbb{N})$$

b) $g: x \mapsto -x \ln(1 + \frac{x^2}{n})$

$g'' = -$

$\Rightarrow g$ est $\searrow$

la suite $(-n \ln(1 + \frac{t^2}{n}))$ est $\searrow$
 $x \mapsto e^x$
 $\Rightarrow (e^{-n \ln(1 + \frac{t^2}{n})})$ est $\searrow$
 $\parallel$
 $(1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^m (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = ?$

soit $f_n(t) = t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$, $t \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C^0} t^e = f(t)$

$f \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$|f_n(t)| \leq t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n+1})^{-(n+1)}$

$f \in C^\infty$, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $m+1-m > 0$
 D'après T.C.D. d'après a

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$
 $= \int_0^1 t^e dt = \frac{1}{e+1} (1)^{e+1} - \frac{1}{e+1} (0)^{e+1}$
 $= \frac{1}{e+1}$